

DEVOIR MAISON 16

Vous traiterez au choix deux des trois exercices suivants, les exercices étant classés par difficulté croissante.

► Exercice 1 : un développement limité via une équation différentielle.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé.

- Justifier que f est dérivable, et sans calculs, justifier que f' possède un $DL_{2n}(0)$ que l'on notera

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n}).$$

- Justifier que f possède un $DL_{2n+1}(0)$ que l'on exprimera en fonction des a_i .
- Montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = -2xy + 1$ qui s'annule en 0. En déduire une relation de récurrence entre les a_k .
- Donner le développement limité d'ordre $2n + 1$ de f en 0.

► Exercice 2 : développement asymptotique de la $n^{\text{ème}}$ solution de $\tan(x) = \sqrt{x}$.

- Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \tan(x) - \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $\tan(x) = \sqrt{x}$ possède une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Dans la suite, on notera x_n cette solution.
- Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$.
- Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n - n\pi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
- Justifier que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$, puis qu'il existe un réel a , que l'on déterminera tel que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + \frac{a}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

► Exercice 3 : nombres de Catalan

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} X^k$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ (appelé le $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan).

- Montrer que $\sqrt{1-4x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2xP_n(x) + o(x^{n+1})$.
- En déduire qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$1 - 4X = (1 - 2XP_n(X))^2 + X^{n+2}Q_n(X).$$

- a. Justifier que $XP_n(X)^2 = P_n(X) - 1 - \frac{1}{4}X^{n+1}Q_n(X)$.

- En déduire que $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.

- Une application en combinatoire** : pour tout $n \in \mathbf{N}$, considérons $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments d'un ensemble muni d'une loi de composition interne non nécessairement associative. On s'intéresse au nombre de manières de placer des parenthèses autour de nos $n + 1$ éléments de manière à calculer leur produit.

Sans trop chercher à formaliser, il faut que chaque parenthèse ouvrante trouve sa parenthèse fermante, et qu'on ne trouve jamais un produit de trois termes ou plus sans parenthèses.

Par exemple, pour $n = 2$, les seuls parenthésages acceptables sont $a_0(a_1a_2)$ et $(a_0a_1)a_2$, et pour $n = 3$, les parenthésages acceptables sont

$$a_0(a_1(a_2a_3)), a_0((a_1a_2)a_3), (a_0a_1)(a_2a_3), ((a_0a_1)a_2)a_3 \text{ et } (a_0(a_1a_2))a_3.$$

On note alors a_n le nombre de parenthésages acceptables. On notera en particulier que $a_0 = a_1 = 1$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = C_n$.

5. **Une application en algèbre** : soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice nilpotente.

On note alors p son indice de nilpotence.

a. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $N^{p-1}X \neq 0_{n,1}$.

b. Prouver que $(X, NX, N^2X, \dots, N^{p-1}X)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

c. En déduire que $N^n = 0_n$.

d. Prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = I_n + N$, et donner l'expression d'une telle matrice en fonction N et des nombres de Catalan.