Devoir maison 15

L'exercice 1 est obligatoire, l'exercice 2 est facultatif.

▸ Exercice 1 : résolution d'une équation différentielle par l'algèbre linéaire.

On note E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ qui sont indéfiniment dérivables, c'est-à-dire qui possèdent une dérivée $k^{\text{ème}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
On admettra (ce sera bientôt prouvé en cours) que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Pour $y \in E$, on notera $D(y) = y'$.
On note F l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, trois fois dérivables, et telles que $f''' - f'' - f' - 2f = 0$.

1. Montrer que F est inclus dans E.
2. a. Prouver que D est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Im}(D)$.
3. On note $D^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D^{n+1} = D^n \circ D$.
   a. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)$.
   b. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.
   c. Justifier que F est stable par D.

Dans toute la suite, on note $H = \mathrm{Ker}(D - 2\mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(D^2 + D + \mathrm{id}_E)$.

4. Justifier que G et H sont deux sous-espaces vectoriels de F.
   On pourra à cet effet remarquer que $X^3 - X^2 - X - 2 = (X-2)(X^2 + X + 1)$.
5. Déterminer une base de H. *(Faire apparaître une équation différentielle).*
6. Déterminer une base de G. *(Même indication)*
7. Montrer que la somme $G + H$ est directe.
8. a. Vérifier que $7\mathrm{id}_E = -(D - 2\mathrm{id}_E) \circ (D + 3\mathrm{id}_E) + (D^2 + D + \mathrm{id}_E)$.
   b. Soit $y \in F$. Montrer que $D^2(y) + D(y) - 6y \in G$ et que $D^2(y) + D(y) + y \in H$.
   c. En déduire que $F = G \oplus H$.
   d. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation différentielle $y''' - y'' - y' - 2y = 0$.

▸ Exercice 2 : endomorphismes laissant stables toutes les droites.

Dans tout l'exercice, on considère un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{K}$, et on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E possédant la propriété suivante : pour tout $x \in E$, $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

Le but de l'exercice est de prouver qu'alors f est une homothétie.

1. Justifier que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \exists! \lambda_x \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ deux vecteurs colinéaires. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Soit $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ non colinéaires. En calculant de deux manières l'image de $x + y$ par f, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
4. En déduire que f une homothétie.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 15

► Exercice 1 : résolution d'une équation différentielle par l'algèbre linéaire.

1. Soit $f \in F$. Alors f est trois dérivable, et $f''' = f'' + f' + 2f$.
Mais puisque f est trois fois dérivable, f'', f' et f sont en particulier dérivables.
Et donc f''' est dérivable[1], et on a $f^{(4)} = f^{(3)} + f'' + 2f'$.
Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$ que f est k fois dérivable.
Nous avons déjà largement[2] initialisé la récurrence.
Supposons donc f k fois dérivable. Alors en dérivant $k-3$ fois la relation $f''' - f'' - f'' - 2f = 0$, il vient $f^{(k)} = f^{(k-1)} + f^{(k-2)} + 2f^{(k-3)}$.
Mais les fonctions $f^{(k-1)}$, $f^{(k-2)}$ et $f^{(k-1)}$ sont dérivables car f est k fois dérivable .
Et donc $f^{(k)}$ est dérivable, si bien que f est $(k+1)$ fois dérivable.
Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, f est k fois dérivable. Et donc $f \in E$, si bien que $\boxed{F \subset E.}$

[1] Si bien que f est quatre fois dérivable.

[2] Jusqu'à $k = 4$.

Rappel
Si f est k fois dérivable, alors elle est ℓ fois dérivable pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$.
Et en particulier, pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, $f^{(\ell)}$ est dérivable.

2.a. Soit $f \in E$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, f est $(k+1)$ fois dérivable, si bien que $f' = D(f)$ est k fois dérivable. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{N}$, $D(f) \in E$.
La linéarité de D est évidente, puisque la dérivation est linéaire sur l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
Donc $\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2.b. Soit $f \in E$. Alors $f \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow f' = 0$.
Puisque $\mathbf{R}$ est un intervalle, nous savons que cette condition équivaut à f constante.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(D) \text{ est l'ensemble des fonctions constantes.}}$

Prouvons à présent que $\operatorname{Im}(D) = E$, sachant que l'inclusion $\operatorname{Im}(D) \subset E$ a été prouvée à la question précédente.
Soit donc $f \in E$. Alors f admet une primitive F_1, qui est donc une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$. Mais sa dérivée f étant k fois dérivable pour tout k, F_1 est $(k+1)$ fois dérivable pour tout k. Et donc est dans E.
Et alors, par définition d'une primitive, on a $f = F_1' = D(F_1) \in \operatorname{Im}(D)$.
On a donc bien $\boxed{E = \operatorname{Im}(D).}$

Autrement dit
D est surjective.

3.a. Soit $f \in F$. Alors nous savons par la question 1 que $f \in E$, et

$$(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)(f) = f''' - f'' - f' - 2f = 0_E.$$

Et donc $f \in \operatorname{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)$, si bien que $F \subset \operatorname{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)$.
Inversement, si $f \in \operatorname{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)$, alors f est dans E, donc en particulier trois fois dérivable, et $(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)(f) = 0_E \Leftrightarrow f''' - f'' - f' - 2f = 0$.
Et donc $f \in F$.
Ainsi, on a bien $\boxed{F = \operatorname{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E).}$

Notation
Remarquons que le vecteur nul de E n'est autre que la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.

3.b. Nous savons déjà que F est inclus dans E. Et puisque D est un endomorphisme de E, $D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$
Et alors, comme tout noyau d'application linéaire, $F = \operatorname{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Astuce
$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. Donc une fois la linéarité de D prouvée, le fait que $D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E$ soit linéaire est automatique. Pas besoin de le prouver.

3.c. Soit $f \in F$. Alors $D^3(f) - D^2(f) - D(f) - 2f = 0_E$, si bien que, par linéarité de D,

$$D\left(D^3(f) - D^2(f) - D(f) - 2f\right) = D(0_E) = 0_E \Leftrightarrow D^4(f) - D^3(f) - D^2(f) - 2D(f) = 0_E.$$

Soit encore

$$D^3(D(f)) = D^2(D(f)) - D(D(f)) - 2D(f) = 0_E \Leftrightarrow \left(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E\right)(D(f)) = 0_E.$$

Et donc $D(f) \in \operatorname{Ker}(D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E) = F$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ est stable par } D.}$

Plus généralement
Nous avons surtout utilisé ici le fait que D et $D^3 - D^2 - D - 2\mathrm{id}_E$ commutent.
On prouve alors (voir TD) que si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

4. Commençons par prouver que H et G sont tous deux inclus dans F.
Essayons d'exploiter l'indication fournie par l'énoncé, sans doute un peu vague pour l'instant, mais qui prendra tout son sens l'an prochain lorsque vous parlerez de polynômes d'endomorphismes.
Notons que[3]

$$(D-2\mathrm{id}_E)\circ(D^2+D+\mathrm{id}_E) = D^3+D^2+D-2D^2-2D-2\mathrm{id}_E = D^3-D^2-D-2\mathrm{id}_E.$$

En particulier, si $f\in G$, alors $(D^2+D+\mathrm{id}_E)(f)=0_E$, et donc en appliquant $D-2\mathrm{id}_E$, il vient $\left(D^3-D^2-D-2\mathrm{id}_E\right)(f)=0_E$.
Et donc $f\in F$, si bien que $G\subset F$.

Sur le même principe, on prouve que $(D^2+D+\mathrm{id}_E)\circ(D-2\mathrm{id}_E)=D^3-D^2-D-2\mathrm{id}_E$.
Et donc si $f\in H$, alors $(D-2\mathrm{id}_E)(f)=0_E$, si bien qu'en appliquant $D^2+D+\mathrm{id}_E$, il vient $\left(D^3-D^2-D-2\mathrm{id}_E\right)=0_E$, et donc $f\in F$.
Et ainsi, $H\subset F$.

Une fois ceci prouvé, il est évident que H et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puisqu'ils sont noyaux d'endomorphismes de E.
Et donc ce sont des $\boxed{\text{sous-espaces vectoriels de } F.}$

5. Par définition, H est l'ensemble des fonctions f indéfiniment dérivables telles que

$$(D-2\mathrm{id}_E)(f)=0_E \Leftrightarrow f'-2f=0_E.$$

Autrement dit, ce sont les fonctions indéfiniment dérivables satisfaisant l'équation différentielle $y'=2y$.
Mais nous connaissons l'ensemble des solutions de cette équation : ce sont les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda e^{2x}$, pour $\lambda\in\mathbf{R}$.
La fonction exponentielle étant indéfiniment dérivable, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, $x\mapsto\lambda e^{2x}$ l'est également.
Autrement dit, toute solution de $y'=2y$ est un élément de H.
Et donc $H=\{x\mapsto\lambda e^{2x},\ \lambda\in\mathbf{R}\}$.
Si on note $f_1 : x\mapsto e^{2x}$, alors $H=\mathrm{Vect}(f_1)$. Et puisque $f_1\neq 0_E$, la famille formée du seul vecteur f_1 est une famille libre, et donc une base de H.

6. De même, G est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables solutions de l'équation différentielle[4] $y''+y'+y=0$.
Le polynôme caractéristique de cette équation est X^2+X+1, qui possède deux racines complexes conjuguées j et $\overline{j}$, soit encore $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.
Donc ses solutions sont les $x\mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$, avec $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$.
Comme à la question 1, on prouve par récurrence sur k que les solutions de cette équation sont k fois dérivables, pour tout $k\in\mathbf{N}$. Et donc sont dans G.
Ainsi, $G=\left\{x\mapsto\lambda e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2\right\}$.
Si on note $f_2 : x\mapsto e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ et $f_3 : x\mapsto e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, alors $G=\mathrm{Vect}(f_2,f_3)$.
Or la famille (f_2,f_3) est libre puisque si λ_2,λ_3 sont deux réels tels que $\lambda_2f_2+\lambda_3f_3=0_E$, alors en évaluant en $x=0$, il vient $\lambda_2\cos(0)=0\Leftrightarrow\lambda_2=0$.
Donc $\lambda_3f_3=0_E$, et puisque f_3 n'est pas la fonction nulle[5], nécessairement $\lambda_3=0$.
Et donc (f_2,f_3) est une base de G.

7. Nous allons prouver que $G\cap H=\{0_E\}$.
Soit donc $f\in G\cap H$. Alors $f\in H$, si bien que $D(f)-2f=0_E\Leftrightarrow D(f)=2f$.
Et donc $D^2(f)=D(2f)=2D(f)=4f$.
Mais puisque $f\in H$, $D^2(f)+D(f)+f=0_E$, et donc $4f+2f+f=0_E\Leftrightarrow 7f=0_E\Leftrightarrow f=0_E$.
Donc $G\cap H\subset\{0_E\}$, et l'inclusion réciproque étant toujours vraie[6], $G\cap H=\{0_E\}$, si bien que $\boxed{G \text{ et } H \text{ sont en somme directe.}}$

8.a. C'est un simple calcul :

$$-(D-2\mathrm{id}_E)\circ(D+3\mathrm{id}_E)+(D^2+D+\mathrm{id}_E) = -\left(D^2+D-6\mathrm{id}_E\right)+D^2+D+\mathrm{id}_E = 7\mathrm{id}_E.$$

[3] Une fois encore, $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau, donc on peut distribuer.

[4] Du second ordre, à coefficients constants.

[5] Elle ne s'annule pas en $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

[6] Une intersection de sous-espaces vectoriels de E contient toujours 0_E.

8.b. On a

$$\left(D^2+D+\mathrm{id}_E\right)\left(D^2(y)+D(y)-6y\right) = D^4(y)+D^3(y)-6D^2(y)+D^3(y)+D^2(y)-6D(y)+D^2(y)+D(y)-6y$$
$$= D^4(y)+2D^3(y)-4D^2(y)-5D(y)-6y.$$

Mais $y \in F$, donc $D^3(y) = D^2(y)+D(y)+2y$, et donc

$D^4(y) = D^3(y)+D^2(y)+2D(y) = D^2(y)+D(y)+2y+D^2(y)+2D(y) = 2D^2(y)+3D(y)+2y.$

On en déduit alors que

$\left(D^2+D+\mathrm{id}_E\right)\left(D^2(y)+D(y)-6y\right) = 2D^2(y)+3D(y)+2y+2D^2(y)+2D(y)+4y-4D^2(y)-5D(y)-6y = 0_E.$

Et donc $D^2(y)+D(y)-6y \in \mathrm{Ker}(D^2+D+\mathrm{id}_E) = G$.

Et de même, on a

$$\left(D-2\mathrm{id}_E\right)\left(D^2(y)+D(y)+y\right) = D^3(y)+D^2(y)+D(y)-2D^2(y)-2D(y)-2y$$
$$= D^2(y)+D(y)+2y-D^2(y)-D(y)-2y = 0_E.$$

On a encore utilisé $D^3(y) = D^2(y)+D(y)+2y$ car $y \in F$.

Et donc $D^2(y)+D(y)+y \in \mathrm{Ker}(D-2\mathrm{id}_E) = H$.

8.c. Soit $y \in F$. Alors, par la relation de la question 8a,

$7y = -(D-2\mathrm{id}_E)\circ(D+3\mathrm{id}_E)(y)+(D^2+D+y) = -(D^2(y)+D(y)-6y)+(D^2(y)+D(y)+y).$

Mais par la question précédente, $D^2(y)+D(y)-6y \in G$, si bien que $-(D^2(y)+D(y)-6y) \in G$, et $D^2(y)+D(y)+y \in H$. Donc

$$y = \underbrace{-\frac{1}{7}\left(D^2(y)+D(y)-6y\right)}_{\in G} + \underbrace{D^2(y)+D(y)+y}_{\in H} \in G+H.$$

Ainsi, $F \subset G+H$. Puisque G et H sont des sous-espaces vectoriels de F, l'inclusion réciproque est évidente.
Et donc $F = G+H$, et puisque nous savons déjà que la somme est directe, $\boxed{F = G\oplus H.}$

8.d. Nous venons donc de prouver que toute solution de l'équation différentielle s'écrit de manière unique comme un élément de G et un élément de H. Autrement dit comme une solution de $y' = 2y$ et une solution de $y''+y'+y = 0$.
Donc les solutions de $y'''-y''-y'-2y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \longmapsto \lambda e^{2x}+\mu e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\nu e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3.}$$

▸ Exercice 2 : endomorphismes laissant stables toutes les droites

1. Soit $x \in E$ non nul. Alors x étant non nul, la famille formée du seul vecteur x est une base de $\mathrm{Vect}(x)$.
Mais puisque $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$, et donc il existe un unique[7] scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

[7] L'unicité vient du fait qu'on a une base, ou plus simplement ici, du fait que $x \neq 0_E$.

2. Puisque x et y sont colinéaires, et qu'ils sont tous deux non nuls, il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $y = \lambda x$.
Mais alors $f(x) = \lambda_x x$, si bien que $f(y) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\lambda_x x$.
Mais par ailleurs $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \lambda x$.
Puisque $x \neq 0_E$, $\lambda\lambda_x = \lambda\lambda_y$, et λ étant non nul, $\lambda_x = \lambda_y$.

3. Si x et y ne sont pas colinéaires, alors[8] (x,y) est libre.
On a alors $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y$.
Mais par ailleurs, $f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda_x x+\lambda_y y$.
Et donc $\lambda_x x+\lambda_y y = \lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y$, si bien que

$$(\lambda_x-\lambda_{x+y})x+(\lambda_y-\lambda_{x+y})y = 0_E.$$

Par liberté de (x,y), on a donc $\lambda_x-\lambda_{x+y} = 0$ et $\lambda_y-\lambda_{x+y} = 0$.
Et donc $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

[8] Par **définition** de colinéaire.

4. Si $E = \{0_E\}$, alors f est l'endomoprhisme nul, qui est bien une homothétie.

Si en revanche, $E \neq \{0_E\}$, considérons $x \in E \setminus \{0_E\}$. Alors par la question précédente, pour tout $y \in E \setminus \{0_E\}$, $f(y) = \lambda_y y = \lambda_x y$.

Puisque par ailleurs, pour $y = 0_E$, $f(x) = 0_E = \lambda_x 0_E$, on en déduit que pour tout $y \in E$, $f(y) = \lambda_x y$. Et donc $f = \lambda_x \mathrm{id}_E$ est une homothétie.