DEVOIR MAISON 15

Vous traiterez au choix l'un des deux exercices suivants : le premier est plutôt facile mais permet de manipuler dans des cas simples beaucoup des notions rencontrées dans le chapitre d'espaces vectoriels.
Le second est un peu plus dur, mais tout de même largement abordable.

▸ Problème 1 : algèbre linéaire dans $\mathbf{R}_3[X]$.

Dans tout l'exercice, E désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}_3[X]$ qui possède 2 comme racine de multiplicité supérieure ou égale à 2.

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$ et en donner une base.
2. Prouver que $\mathbf{R}_3[X] = E \oplus \mathbf{R}_1[X]$.
   Indication : on pourra utiliser une division euclidienne par $(X-2)^2$.
3. Dans cette question, on note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(2), P'(2)) \end{array} \right.$.
   a. Montrer que φ est une application linéaire.
   b. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$.
   c. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$ et en donner une base.
4. a. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{R}_3[X]$ vérifiant
   $$f(1) = 1,\ f(X) = X^2,\ f(X^2) = X, f(X^3) = X^3.$$
   Pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$, on exprimera $f(P)$ en fonction de a, b, c et d.
   b. Cet endomorphisme f est-il injectif ? Surjectif ?
5. Soient $S = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid f(P) = P\}$ et $A = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid f(P) = -P\}$.
   a. Justifier que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_3[X]$.
   b. Montrer que S et A sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$.
   c. Écrire le polynôme $X^3 + 2X^2 - X + 2$ comme somme d'un élément de S et d'un élément de A.
6. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $|\lambda| \neq 1$. Montrer que le polynôme nul est le seul $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tel que $f(P) = \lambda P$.

▸ Problème 2 : suites récurrentes linéaires d'ordre 3 via l'algèbre linéaire

Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'espace vectoriel réel des suites à valeurs réelles.
On note $F = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + 5u_{n+1} + 3u_n\}$. On note également $\varphi : E \to E$ l'application qui à une suite $(u_n)_n$ associe la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = u_{n+1}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
2. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et que $F = \operatorname{Ker}(\varphi^3 - \varphi^2 - 5\varphi - 3\mathrm{id}_E)$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, montrer que $E_\lambda(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_E)$ est une droite vectorielle, et en déterminer une base.
4. En notant que la suite de terme général $(-1)^n$ est dans F, déterminer tous les $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que $E_\lambda(\varphi) \subset F$.
5. On note $G = \operatorname{Ker}(\varphi^2 + 2\varphi + \mathrm{id}_E)$.
   a. Montrer que $E_3(\varphi)$ et G sont des sous-espaces vectoriels de F, et qu'ils sont en somme directe.
   b. Soit $(u_n)_n \in F$. On suppose qu'il existe deux suites $(v_n) \in E_3(\varphi)$ et $(w_n) \in G$ telles que :
   $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = v_n + w_n.$$
   Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de v_n et w_{n+1}, puis u_{n+2} en fonction de v_n et w_{n+2}.
   En déduire l'expression de v_n et w_n en fonction de u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.

c. Prouver alors que $F = E_3(\varphi) \oplus G$. Pour $(u_n)_n \in F$ déterminer la projection de $(u_n)_n$ sur G parallèlement à $E_3(\varphi)$.

6. Donner une base de G.

7. En déduire une base de F. Déterminer l'expression de l'unique suite $(u_n) \in F$ telle que $u_0 = u_1 = -3$ et $u_2 = 1$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 15

► Problème 1 : algèbre linéaire dans $\mathbf{R}_3[X]$.

1. Soit $P \in E$. Alors il existe $Q \in \mathbf{R}_1[X]$ tel que $P = (X-2)^2 Q$. Et si $a, b \in \mathbf{R}$ sont tels que $Q = aX + b$, alors $P = (X-2)^2(aX+b) = aX(X-2)^2 + b(X-2)^2$.
Donc $E \subset \operatorname{Vect}\left((X-2)^2, X(X-2)^2\right)$.

Et inversement, si P est de la forme $aX(X-2)^2 + b(X-2)^2$, alors il est clair que P est divisible par $(X-2)^2$, et donc possède 2 comme racine de multiplicité 2 ou plus.
Ainsi, $E = \operatorname{Vect}\left(X(X-2)^2, (X-2)^2\right)$, si bien que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$, dont une famille génératrice est $\left((X-2)^2, X(X-2)^2\right)$.
Puisque cette famille est formée de deux polynômes de degrés distincts, elle est libre, et donc forme une base de E.

2. Soit $P \in E \cap \mathbf{R}_1[X]$. Alors P est de degré au plus 1, mais possède 2 comme racine de multiplicité au moins deux. Donc c'est le polynôme nul.
·Ainsi, $E \cap \mathbf{R}_1[X] = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$, si bien que E et $\mathbf{R}_1[X]$ sont en somme directe.

Reste à prouver que cette somme est égale à $\mathbf{R}_3[X]$ tout entier.
Puisque l'inclusion $E \oplus \mathbf{R}_1[X] \subset \mathbf{R}_3[X]$ est triviale, il s'agit de prouver l'inclusion réciproque, c'est-à-dire que tout polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$ s'écrit d'au moins une manière comme somme d'un élément de E et d'un élément de $\mathbf{R}_1[X]$.
Soit donc $P \in \mathbf{R}_3[X]$. Notons $P = (X-2)^2 Q + R$ la division euclidienne de P par $(X-2)^2$, avec $R \in \mathbf{R}_1[X]$.
Alors $(X-2)^2 Q$ possède 2 comme racine de multiplicité au moins 2, et est de degré inférieur ou égal à 3 puisque P et R le sont. Donc $(X-2)^2 Q \in E$.
Donc $P = (X-2)^2 Q + R \in E \oplus \mathbf{R}_1[X]$.

Au final, on a bien prouvé que $\mathbf{R}_3[X] = E \oplus \mathbf{R}_1[X]$.

> **Rappel**
> Un polynôme qui possède plus de racines (comptées avec multiplicités) que son degré est nécessairement le polynôme nul.

> **Méthode**
> Une autre option aurait été de prouver que tout élément de $\mathbf{R}_3[X]$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de E et d'un élément de $\mathbf{R}_1[X]$, sans prouver au préalable que la somme était directe.
> Nous donnerons encore une autre méthode à base de dimension dans le chapitre sur la dimension finie.

3.a. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(2), (\lambda P + Q)'(2)) = (\lambda P(2) + Q(2), \lambda P'(2) + Q'(2)) \\ &= \lambda(P(2), P'(2)) + (Q(2), Q'(2)) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire.}}$

3.b. Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$. Alors $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P(2) = P'(2) = 0$, ce qui est le cas si et seulement si 2 est racine de P de multiplicité au moins 2.
Et donc $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P \in E$, si bien que $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = E.}$

3.c. Nous savons qu'une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$ est donnée par l'image d'une famille génératrice de $\mathbf{R}_3[X]$.
Par exemple par l'image de la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$, c'est-à-dire de $(1, X, X^2, X^3)$.
On a alors $\varphi(1) = (1, 0)$, $\varphi(X) = (2, 1)$, $\varphi(X^2) = (4, 4)$ et $\varphi(X^3) = (8, 12)$.
Donc $((1,0), (2,1), (4,4), (8,12))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$, mais rien ne dit que ce soit une base.
Nous pourrions étudier la liberté de cette famille et constater qu'elle n'est pas libre, puis essayer d'en extraire une base.

Mais notons plutôt que que $(0,1) = (2,1) - 2(1,0) = \varphi(X) - 2\varphi(1) = \varphi(X-2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$.
Ainsi, $\operatorname{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$, qui contient donc $(1,0)$ et $(0,1)$. Et par conséquent, qui contient $\operatorname{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbf{R}^2$.
Puisque par ailleurs $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbf{R}^2$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbf{R}^2$, et toute base de $\mathbf{R}^2$ (donc par exemple la base canonique) est une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

> **Méthode**
> La famille n'étant pas libre, on pourrait donc supprimer les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres jusqu'à aboutir à une famille libre, qui sera donc une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

> **Remarque**
> En pratique, toute famille de deux éléments de $\operatorname{Im}(\varphi)$ non colinéaires est une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$. Nous ne pouvons pas encore le prouver, mais si en menant les calculs différemment vous avez trouvé une base formée de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$, elle est correcte.

4.a. Notons que si un tel endomorphisme existe, alors à $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, il doit associer

$$\varphi(P) = a\varphi(X^3) + b\varphi(X^2) + c\varphi(X) + d\varphi(1) = aX^3 + bX + cX^2 + d.$$

On vérifie alors aisément que l'application ainsi définie est bien linéaire, et donc est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

4.b. Pour l'injectivité, on peut étudier le noyau de φ et prouver qu'il est réduit à $\{0_{\mathbf{R}[X]}\}$.
Et pour la surjectivité, on peut par exemple noter que si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$, alors $P = \varphi(aX^3 + cX^2 + bX + d)$.

Mais plus simplement, $\varphi \circ \varphi = \text{id}$, si bien que φ est bijective, égale à sa propre bijection réciproque.

5.a. La première option est d'utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels. S contient le polynôme nul.
Soient $P, Q \in S$ (de sorte que $f(P) = P$ et $f(Q) = Q$) et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q) = \lambda P + Q$. Donc $\lambda P + Q \in S$, si bien que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.

L'autre option est d'écrire notre espace comme noyau d'une application linéaire, ce sera alors forcément un sous-espace vectoriel.
Ici, on a $A = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid f(P) + P = 0_{\mathbf{R}[X]}\} = \text{Ker}(f + \text{id})$.
Puisque $f + \text{id}$ est un endomorphisme[1] de $\mathbf{R}_3[X]$, son noyau est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.

[1] Car somme de deux endomorphismes.

5.b. Donnons deux solutions.
► **Première option** : prouvons par analyse-synthèse que pour tout $P \in \mathbf{R}_3[X]$, il existe un unique $(P_A, P_S) \in A \times S$ tel que $P = P_A + P_S$.
Soit donc $P \in \mathbf{R}_3[X]$ fixé.
Analyse : supposons que $P = P_A + P_S$, avec $(P_A, P_S) \in A \times S$.
Alors $f(P) = f(P_A) + f(P_S) = -P_A + P_S$.
Et donc $P + f(P) = 2P_S$, si bien que $P_S = \dfrac{P + f(P)}{2}$, et donc $P_A = P - P_S = \dfrac{P - f(P)}{2}$.
Donc si elle existe, la décomposition de P est unique.

Synthèse : posons $P_S = \dfrac{P + f(P)}{2}$ et $P_A = \dfrac{P - f(P)}{2}$.
Alors il est clair que $P_A + P_S = P$, et de plus

$$f(P_A) = \frac{f(P) - f^2(P)}{2} = \frac{f(P) - P}{2} = -P_A$$

si bien que $P_A \in A$. On vérifie de même que $f(P_S) = P_S$, et donc $P_S \in S$.
Ainsi, il existe bien $(P_A, P_S) \in A \times S$ tel que $P = P_A + P_S$, nécessairement unique d'après ce qui a été fait dans l'nalayse.
Donc tout élément de $\mathbf{R}_3[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de A et d'un élément de S : ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$.

► **Deuxième option :** à la question précédente, nous avons en fait prouvé que $\varphi^2 = \text{id}$, c'est-à-dire que φ est une symétrie.
Et alors il a été prouvé en cours que $\text{Ker}(\varphi - \text{id})$ et $\text{Ker}(\varphi + \text{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$.
Or

$$\text{Ker}(\varphi + \text{id}) = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid (\varphi - \text{id})(P) = 0_{\mathbf{R}[X]}\} = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \varphi(P) = P\} = S.$$

Et sur le même principe,

$$\text{Ker}(\varphi + \text{id}) = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \varphi(P) = -P\} = A.$$

Donc S et A sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$.

5.c. La première méthode de la question précédente a l'avantage de nous fournir des formules explicites pour la décomposition. Notons $P = X^3 + 2X^2 - X + 2$.
Alors $f(P) = X^3 - X^2 + 2X + 2$, si bien que

$$\frac{P + f(P)}{2} = X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 2 \text{ et } \frac{P - f(P)}{2} = X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 2$$

et donc la décomposition cherchée est

$$P = \underbrace{X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 2}_{\in S} + \underbrace{X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 2}_{\in A}.$$

6. Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, et soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.
Écrivons alors P sous la forme $P = P_A + P_S$, avec comme précédemment $P_A \in A$ et $P_S \in S$.
Il vient alors $\lambda(P) = \varphi(P) = \varphi(P_A) + \varphi(P_S) = -P_A + P_S$.
Mais pas ailleurs, $\lambda P = \lambda P_A + \lambda P_S$, et donc par unicité de la décomposition de λP dans la somme directe $\mathbf{R}_3[X] = A \oplus S$, on a $\lambda P_A = -P_A$ et $\lambda P_S = P_S$.
Puisque $\lambda \neq -1$, $P_A = 0_{\mathbf{R}[X]}$, et puisque $\lambda \neq 1$, $P_S = 0_{\mathbf{R}[X]}$, si bien que $P = 0_{\mathbf{R}[X]}$.
Et inversement, il est évident que $P = 0_{\mathbf{R}[X]}$ vérifie $\varphi(P) = 0_{\mathbf{R}[X]} = \lambda P$.
En résumé, nous venons de prouver que pour $\lambda \neq \pm 1$, $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$.

▸ Problème 2 : suites récurrentes linéaires d'ordre 3 via l'algèbre linéaire

1. Soient (u_n), (u'_n) deux suites de E, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Notons (v_n) l'image par φ de (u_n), (v'_n) l'image de (u'_n) par φ et (w_n) l'image de $(\lambda u_n + u'_n)_n$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = \lambda u_{n+1} + u'_{n+1} = \lambda v_n + v'_n$, de sorte que $(w_n)_n = \lambda (v_n)_n + (v'_n)_n$, et donc $\varphi(\lambda(u_n)_n + (v_n)_n) = \lambda\varphi((u_n)_n) + \varphi((v_n)_n)$.
Et donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$ est non nulle et est dans $\operatorname{Ker} \varphi$, donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injectif.}}$

Enfin, pour $(u_n)_n \in E$, si on définit une suite $(v_n)_n$ par $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$, alors $\varphi((v_n)_n) = (u_n)_n$, et donc $\boxed{\varphi \text{ est surjectif.}}$

2. Soit $(u_n)_n \in E$. Alors $u_n \in F$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - 5u_{n+1} - 3u_n = 0 &\Leftrightarrow \varphi^3\left((u_n)_n\right) - \varphi^2\left((u_n)_n\right) - 5\varphi\left((u_n)_n\right) - 3(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = 0_E \\ &\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \operatorname{Ker}(\varphi^3 - \varphi^2 - 5\varphi - 3\mathrm{id}_E) \end{aligned}$$

Donc on a bien $F = \operatorname{Ker}(\varphi^3 - \varphi^2 - 5\varphi - 3\mathrm{id}_E)$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de E car noyau d'un endomorphisme de E.

> **Alternative**
> On pourrait prouver directement à l'aide de la caractérisation des sous-espaces vectoriels que F est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors une suite $(u_n)_n$ est dans $E_\lambda(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{id}_E)$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n$.
Autrement dit si et seulement si (u_n) est géométrique de raison λ.
Mais nous savons qu'une suite est géométrique de raison λ si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0\lambda^n$.
Soit si et seulement si elle est dans $\operatorname{Vect}\left((\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$.
Puisque $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas la suite nulle[2], la famille formée de la seule suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre, et donc est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{id}_E)$, qui se trouve donc être une droite vectorielle de E.

[2] Même si $\lambda = 0$, son premier terme vaut 1.

4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $E_\lambda(\varphi) \subset F \Leftrightarrow (\lambda^n)_n \in F$. Soit si et seulement si

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \lambda^{n+3} = \lambda^{n+2} + 5\lambda^{n+1} + 3\lambda^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ \lambda^n\left(\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda + 3\right) = 0.$$

Soit si et seulement si[3] $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$.
L'énoncé nous dit que $\lambda = -1$ convient, ce qu'on vérifie aisément.
Donc le polynôme $X^3 - X^2 - 5X - 3$ se factorise par $X + 1$, et donc en réalisant une division euclidienne, on obtient $X^3 - X^2 - 5X - 3 = (X+1)\left(X^2 - 2X - 3\right) = (X+1)^3(X+3)$.
Et donc les seules solutions de $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$, sont $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$.
Et donc $\boxed{E_\lambda(\varphi) \subset F \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 3\}.}$

[3] Même si $\lambda = 0$, $\lambda^0 = 1$.

5.a. Soit $(u_n)_n$ une suite de $E_3(\varphi) \cap G$.
Puisque $(u_n)_n \in E_3(\varphi)$, $(u_n)_n$ est géométrique de raison 3, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.
Puisque $(u_n)_n \in G$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3^2u_n + 6u_n + u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = 0$.
Donc $(u_n)_n$ est la suite nulle, donc $E_3(\varphi) \cap G = \{0_E\}$.
Ainsi, $\boxed{E_3(\varphi) \text{ et } G \text{ sont en somme directe.}}$

5.b. Nous avons déjà dit que $E_3(\varphi)$ est formé des suites géométriques de raison 3, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 3v_n$.

Donc $u_{n+1} = v_{n+1} + w_{n+1} = 3v_n + w_{n+1}$. De même, $u_{n+2} = 9v_n + w_{n+2}$.
Mais $(w_n)_n \in G = \operatorname{Ker}(\varphi^2 + 2\varphi + \mathrm{id}_E)$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n = 0 \Leftrightarrow$ $w_{n+2} = -2w_{n+1} - w_n$.
On a donc

$$\begin{cases} u_n = v_n + w_n \\ u_{n+1} = 3v_n + w_{n+1} \\ u_{n+2} = 9v_n - 2w_{n+1} - w_n \end{cases}$$

En particulier $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 16v_n$ et donc $v_n = \dfrac{1}{13}(u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n)$.

Et alors $w_n = u_n - v_n = \dfrac{1}{16}(-u_{n+2} - 2u_{n+1} + 15u_n)$.

5.c. Il s'agit donc de prouver que toute suite $(u_n)_n \in F$ s'écrit de manière unique comme somme d'une suite $(v_n)_n \in E_3(\varphi)$ et d'une suite $(w_n)_n \in G$.
Soit donc $(u_n)_n \in F$ fixée.
Nous venons de procéder à une phase d'analyse : si deux telles suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ existent, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \dfrac{1}{16}(u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n)$ et $w_n = \dfrac{1}{16}(-u_{n+2} - 2u_{n+1} + 15u_n)$.
Reste à procéder à la synthèse : soient $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies comme ci-dessus. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{16}(u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{16}(u_{n+2} + 5u_{n+1} + 3u_n + 2u_{n+2} + u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{16}(3u_{n+2} + 6u_{n+1} + 3u_n) = 3v_n. \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_n$ est géométrique de raison 3, et donc est dans $E_3(\varphi)$.

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n &= \frac{1}{16}(-u_{n+4} - 2u_{n+3} + 15u_{n+2} - 2u_{n+3} - 4u_{n+2} + 30u_{n+1} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + 15u_n) \\ &= \frac{1}{16}(-u_{n+4} - 4u_{n+3} + 10u_{n+2} + 28u_{n+1} + 15u_n) \\ &= \frac{1}{16}(-u_{n+3} - 5u_{n+2} - 3u_{n+1} - 4u_{n+3} + 10u_{n+2} + 28u_{n+1} + 15u_n) \\ &= \frac{1}{16}(-5u_{n+3} + 5u_{n+2} + 25u_{n+1} + 15u_n) \\ &= \frac{1}{16}(-5u_{n+2} - 25u_{n+1} - 15u_n + 5u_{n+2} + 25u_{n+1} + 15u_n) = 0. \end{aligned}$$

Et donc $(w_n)_n$ est bien dans G.
Enfin, on a bien $v_n + w_n = u_n$, et donc (u_n) s'écrit bien de manière **unique** comme somme d'une suite de $E_3(\varphi)$ et d'une suite de G.
On reconnaît là l'une des caractérisations de $F = E_3(\varphi) \oplus G$.

> **Remarque**
> Notons que nous n'avons en fait pas besoin du résultat de la question 5.a, que nous venons de retrouver ici, et qui découle de l'unicité de la décomposition de $(u_n)_n$.

La projection sur G parallèlement à $E_3(\varphi)$ est l'application qui à une suite (u_n) associe la suite (w_n) définie ci-dessus, c'est-à-dire sa composante suivant G.
C'est donc l'application qui à (u_n) associe (w_n) définie par $w_n = \dfrac{1}{16}(-u_{n+2} - 2u_{n+1} + 15u_n)$.

6. Nous savons que G est l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$.
Or nous avons parfaitement décrire l'ensemble de ces suites, qui sont récurrentes linéaires d'ordre 2.
Le polynôme caractéristique possède ici -1 pour racine double, donc une suite $(u_n)_n$ est dans G si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda n(-1)^n + \mu(-1)^n$.
Donc une famille génératrice de E est la famille formée des deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = n(-1)^n$ et $y_n = (-1)^n$.
Cette famille est évidemment libre car ces deux suites ne sont pas proportionnelles. On a donc une base de G.

7. Notons $z_n = 3^n$, de sorte que (z_n) est une base de $E_3(\varphi)$. Alors $((x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n)$ est une famille génératrice de F car concaténation d'une famille génératrice de G et d'une famille génératrice de $E_3(\varphi)$.
Elle est libre car si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des réels tels que $\lambda_1(x_n)_n + \lambda_2(y_n)_n + \lambda_3(z_n)_n = 0_E$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_1 n(-1)^n + \lambda_2(-1)^n + \lambda_3 3^n = 0$.
Divisons alors par 3^n, et passons à la limite lorsque $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_1 n(-1)^n}{3^n} + \frac{\lambda_2(-1)^n}{3^n} + \lambda_3 = \lim_{n\to+\infty} 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0.$$

Et comme on sait déjà que $((x_n), (y_n))$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Donc $((x_n), (y_n), (z_n))$ est une base de F.

Remarque

Nous pouvons en réalité faire mieux en utilisant un résultat vu dans le chapitre de dimension finie : la concaténation d'une base de $E_3(\varphi)$ et d'une base de G est automatiquement une base de F.

Nous cherchons donc dans la suite à prouver qu'il existe une et une seule suite (u_n) de F telle que $u_0 = u_1 = -3$ et $u_2 = 1$.
Soient donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$, et soit $(u_n) = (\lambda_1 n(-1)^n + \lambda_2(-1)^n + \mu 3^n)_n$. On a alors

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = -3 \\ u_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = -3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = -3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -5/2 \\ \lambda_3 = -1/2 \end{cases}$$

Donc il existe bien une et une seule suite de F qui convient, qui est la suite de terme général $4n(-1)^n + \frac{5}{2}(-1)^{n+1} - \frac{1}{2}3^n$.