

# DEVOIR MAISON 14

Vous traiterez au choix l'un des deux exercices suivants, le second étant plus difficile que le premier.

## ► Problème 1 : polynôme de Tchebychev

Dans ce problème, nous étudions une famille très classique de polynômes, qui furent introduits par le mathématicien russe Pafnouti TCHEBYCHEV.

On définit une suite  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de polynômes de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

### Partie I. Premières propriétés

1. Calculer  $T_2, T_3$  et  $T_4$ .
2. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que :
  - a.  $T_n$  est de degré  $n$ , et de coefficient dominant  $2^{n-1}$
  - b.  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$
  - c. tous les coefficients de  $T_n$  sont dans  $\mathbf{Z}$
  - d.  $T_n(1) = 1$
3. Montrer que pour tout  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$ .
4. En déduire que  $\forall m, n \in \mathbf{N}$ ,  $T_m \circ T_n = T_{mn}$ .
5. Prouver que pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$ .  
Prouver également que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $T_n(\operatorname{ch}(x)) = \operatorname{ch}(nx)$ .
6. Retrouver alors le résultat de la question 4.
7. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_n$  est scindé (sur  $\mathbf{R}$ ) à racines simples, et que toutes ses racines sont dans  $] -1, 1[$ .

### Partie II. Minoration sur $[-1, 1]$ de $|P|$ , pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$ .

Pour  $P \in \mathbf{R}[X]$ , on note  $\|P\|_\infty = \max\{|P(t)|, t \in [-1, 1]\}$ .

8. Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , calculer  $\|T_n\|_\infty$ .
9. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ .  
Soit également  $P \in \mathbf{R}_n[X]$ , de degré  $n$ , et de coefficient dominant  $\lambda$ . Le but de cette question est de prouver que  $\|P\|_\infty \geq \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$ .

On raisonne par l'absurde en supposant que  $\|P\|_\infty < \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$ , et on pose  $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$ .

- a. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer  $T_n(x_k)$ .
- b. Justifier que  $Q \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ , et pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer le signe de  $Q(x_k)$ .
- c. En déduire que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $Q$  s'annule au moins une fois sur  $]x_k, x_{k+1}[$ .
- d. Prouver alors que  $P = \frac{\lambda}{2^{n-1}} T_n$ , et aboutir à une contradiction.

## ► Problème 2 : une preuve du grand théorème de Fermat... pour les polynômes

Dans ce problème, pour  $n \geq 2$ , on s'intéresse à l'équation de Fermat :  $A^n + B^n = C^n$ , d'inconnue  $(A, B, C) \in \mathbf{C}[X]^3$ .

On se propose notamment de montrer un analogue dans  $\mathbf{C}[X]$  au grand théorème de Fermat, qui affirme que pour  $n \geq 3$ , les seules solutions sont les solutions «évidentes» (en un sens qui sera précisé dans la partie II).

### Partie I. L'inégalité de Mason

Si  $P \in \mathbf{C}[X]$  est un polynôme non nul à coefficients complexes, on note :

- $R(P)$  l'ensemble des racines complexes de  $P$ , et  $r(P)$  le cardinal de  $R(P)$
- si  $z \in \mathbf{C}$ ,  $\mu_P(z)$  désigne la multiplicité de  $z$  comme racine de  $P$ , avec la convention que  $\mu_P(z) = 0$  si  $z$  n'est pas racine de  $P$ .

1. Soient  $A, B, C \in \mathbf{C}[X]$ , non nuls, tels que  $A = BC$ . Déterminer des relations (par exemple des égalités ou des inégalités) liant :

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| a. $\deg(A)$ , $\deg(B)$ et $\deg(C)$ | d. $\mu_A(z)$ , $\mu_B(z)$ et $\mu_C(z)$ , pour $z \in \mathbf{C}$ |
| b. $R(A)$ , $R(B)$ et $R(C)$          | e. $r(A)$ et $\deg(A)$   |
| c. $r(A)$ , $r(B)$ et $r(C)$          | f. $\deg(A)$ et $\sum_{z \in R(A)} \mu_A(z)$                       |

Dans toute la suite de la partie I, on suppose que  $A, B, C$  sont trois polynômes de  $\mathbf{C}[X]$  vérifiant  $A + B + C = 0_{\mathbf{C}[X]}$ . On suppose de plus que  $A, B, C$  ne sont pas tous les trois constants, et qu'il n'existe pas de racine commune aux trois polynômes  $A, B$  et  $C$ , c'est-à-dire que  $R(A) \cap R(B) \cap R(C) = \emptyset$ .

On notera également  $P = AB' - BA'$ .

2. Montrer que  $R(A)$ ,  $R(B)$  et  $R(C)$  sont deux à deux disjoints.
3. a. Montrer que  $P$  n'est pas nul.  
b. Prouver que  $P = BC' - CB' = CA' - AC'$ .  
c. En déduire que  $\deg(P) \leq \deg(B) + \deg(C) - 1$  et  $\deg(P) \leq \deg(A) + \deg(C) - 1$ .
4. Soit  $z \in R(A)$ . Démontrer que  $\mu_P(z) \geq \mu_A(z) - 1$ . En déduire des inégalités analogues pour  $B$  et  $C$ .
5. En sommant les inégalités précédemment obtenues, prouver que :

$$\deg(P) \geq \sum_{z \in R(A)} (\mu_A(z) - 1) + \sum_{z \in R(B)} (\mu_B(z) - 1) + \sum_{z \in R(C)} (\mu_C(z) - 1).$$

6. En déduire que  $\deg(P) \geq \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) - (r(A) + r(B) + r(C))$ .
7. Prouver alors, à l'aide des inégalités de la question 3.c l'inégalité de Mason :

$$r(A) + r(B) + r(C) \geq 1 + \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)).$$

### Partie II. Le théorème de Fermat pour les polynômes

8. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , soit  $D \in \mathbf{C}[X]$ , et soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ . Justifier qu'il existe  $\gamma \in \mathbf{C}$  tel que  $(\alpha D)^n + (\beta D)^n = (\gamma D)^n$ . Ainsi, il existe toujours des solutions non nulles à l'équation de Fermat. On cherche dans la suite à prouver qu'il s'agit là des seules solutions.

9. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soient  $U, V, W$  des polynômes à coefficients complexes, non nuls, ne possédant pas de racine commune (c'est-à-dire tels que  $R(U) \cap R(V) \cap R(W) = \emptyset$ ) et vérifiant  $U^n + V^n + W^n = 0$ .

À l'aide de l'inégalité de Mason, prouver que  $U, V$  et  $W$  sont constants.

10. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soient  $\widehat{U}, \widehat{V}$  et  $\widehat{W}$  des polynômes complexes, non nuls, sans racine commune tels que  $\widehat{U}^n + \widehat{V}^n = \widehat{W}^n$ .  
Prouver que  $\widehat{U}, \widehat{V}$  et  $\widehat{W}$  sont constants.

11. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3, et soient  $A, B, C$  trois polynômes à coefficients complexes. Prouver que

$$A^n + B^n = C^n \Leftrightarrow \exists D \in \mathbf{C}[X], \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{C}^3, \begin{cases} \alpha^n + \beta^n = \gamma^n \\ A = \alpha D \\ B = \beta D \\ C = \gamma D \end{cases}$$

*Ainsi, les seules solutions à l'équation de Fermat sont celles trouvées précédemment.*

12. Pour  $n = 2$ , montrer qu'il existe des polynômes  $U, V, W \in \mathbf{C}[X]$ , non constants et sans racines communes (donc pas de la forme obtenue à la question précédente) tels que  $U^2 + V^2 = W^2$ .