

DEVOIR MAISON 14

L'exercice 1 est obligatoire, l'exercice 2 est facultatif.

► Exercice 1 : polynômes de Tchebychev

Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note $M(P) = \max_{x \in [-1,1]} |P(x)|$.

On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ en posant

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

1. Justifier rapidement l'existence de $M(P)$, pour $P \in \mathbf{R}[X]$.
2. Étude de la suite (T_n) .
 - a. Calculer T_2, T_3, T_4 .
 - b. Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n est un polynôme à coefficients entiers, de degré n , et dont on précisera le coefficient dominant. Établir également que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
 - c. Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.
3. Étude de la fonction $x \mapsto T_n(x)$ sur $]1, +\infty[$
 - a. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$, puis que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, \quad T_n \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right).$$

- b. En déduire, pour $x > 1$ et $n \in \mathbf{N}^*$, que $T_n(x) > 1$, et prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $\forall x > 1, T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n$.
 - c. Montrer que toutes les racines réelles de T_n sont dans $] -1, 1[$.
4. Racines de T_n
 - a. Prouver que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. En déduire $M(T_n)$.
 - b. Montrer que T_n est scindé sur \mathbf{R} et que toutes ses racines sont simples. Donner alors sa décomposition en produit de facteurs irréductibles.
 5. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\alpha_k = \cos \left(\frac{(n-k)\pi}{n} \right)$.
Prouver que $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1$ et pour $x \in [-1, 1]$, $|T_n(x)| = M(T_n)$ si et seulement si $x \in \{\alpha_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Dans toute la suite, n est fixé, $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$ sont comme ci-dessus, et on note L_0, L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés à $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

6. Démontrer que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \geq 1, (-1)^{n-k} L_k(x) \geq 0$.
En déduire que pour $x \geq 1, T_n(x) = |L_0(x)| + |L_1(x)| + \dots + |L_n(x)|$.
7. Prouver que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et pour tout $x \geq 1, |P(x)| \leq M(P) T_n(x)$.
8. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ un polynôme unitaire de degré n . En utilisant la question précédente, prouver que pour tout $x \geq 1, M(P) \geq \frac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n}$.
En déduire que $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
9. Déterminer un polynôme unitaire P , de degré n , tel que $M(P) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

► Exercice 2 (facultatif) : une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

Dans tout le problème, on considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, de degré p .

On note alors $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, et on note $\mathcal{P} = \{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\}$.

1. a. Montrer que \mathcal{P} admet une borne inférieure, que l'on notera α dans la suite.
- b. Montrer que pour tout nombre complexe z de module $r > 0$, on a

$$|P(z)| \geq |a_p|r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|r^k.$$

- c. En déduire que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$, c'est-à-dire que

$$\forall A > 0, \exists r_0 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > r_0 \Rightarrow |P(z)| > A.$$

- d. Prouver alors qu'il existe $M > 0$ tel que $\alpha = \inf \{|P(z)|, 0 \leq |z| \leq M\}$.
2. a. Prouver qu'il existe une suite (z_n) à valeurs complexes telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(z_n)| = \alpha$.

- b. En utilisant la question 1.d, prouver que (z_n) est bornée.
- c. En déduire qu'il existe un complexe $y \in \mathbb{C}$ tel que $|P(y)| = \alpha$.

3. On suppose que $\alpha > 0$, et on note alors $Q = \frac{P(X+y)}{P(y)} \in \mathbb{C}[X]$.

- a. Montrer que $\inf \{|Q(z)|, z \in \mathbb{C}\} = |Q(0)| = 1$.

- b. Prouver qu'il existe $q \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $b_q \neq 0$ tels que $Q = \sum_{k=q+1}^p b_k X^k - b_q X^q + 1$.

- c. On note alors $b_q = \rho e^{i\theta}$ la forme exponentielle de b_q .
Prouver qu'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \leq r_0, \left| Q\left(re^{-i\frac{\theta}{q}}\right) \right| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k.$$

- d. En déduire que $\alpha = 0$.

4. Prouver alors le théorème de d'Alembert-Gauss.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 14

► Exercice 1 : polynômes de Tchebychev

1. Une fonction polynomiale est continue. Donc P étant continue, $|P|$ l'est aussi. Donc comme toute fonction continue sur un segment, elle admet un maximum sur $[-1, 1]$.

2. Étude la suite (T_n)

2.a. On a $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$.

Puis $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$. Et $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

2.b. Les premiers calculs semblent prouver que pour $n \geq 1$, T_n est de degré n et possède 2^{n-1} comme coefficient dominant.

Montrons par récurrence double sur $n \geq 1$ que T_n est de degré n , à coefficients entiers, de coefficient dominant 2^{n-1} , et que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Pour $n = 1$ et $n = 2$ c'est vrai.

Supposons que la propriété soit vraie aux rang $n - 1$ et n .

Alors $T_{n+1} = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$, avec $\deg(2XT_n) = 1 + \deg T_n = n + 1$ et $\deg T_{n-1} = n - 1$. Donc $\deg T_{n+1} = \max(\deg(2XT_n), \deg(T_{n-1})) = n + 1$.

Et alors, le coefficient de degré $n + 1$ de T_{n+1} est celui de $2XT_n$, c'est-à-dire deux fois le coefficient dominant de T_n , donc $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

De plus, puisque les coefficients de T_n et T_{n-1} sont entiers, ceux de T_{n+1} le sont aussi (la somme et le produit de polynômes à coefficients entiers est encore un polynôme à coefficients entiers.)

Enfin, on a

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= -2XT_n(-X) - T_{n-1}(-X) = -2X(-1)^n T_n(X) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(X) \\ &= (-1)^{n+1} (2XT_n(X) - T_{n-1}(X)) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X). \end{aligned}$$

Donc la propriété est encore vraie au rang $n + 1$, par le principe de récurrence double, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Notons que le cas $n = 0$ mérite un traitement particulier, car alors T_0 possède 1 pour coefficient dominant, et non $2^{0-1} = \frac{1}{2}$.

2.c. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$.

Donc la suite $(T_n(1))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n(1) = \lambda + n\mu$.

Mais $T_0(1) = 1$, donc $\lambda = 1$, et $T_1(1) = 1$, donc $\mu = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n(1) = 1$.

Et alors $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$.

3. Étude de la fonction $x \mapsto T_n(x)$ sur $[-1, 1]$.

3.a. Notons $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

Alors φ est dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée $\varphi' : x \mapsto \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) > 0$.

Donc φ est strictement croissante, continue¹, avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Par le théorème de la bijection, φ réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur lui-même.

Soit $x \in]1, +\infty[$. Prouvons alors par récurrence double sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$T_n \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right).$$

Pour $n = 1$, on a $T_1 \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(x^1 + \frac{1}{x^1} \right)$.

Pour $n = 2$, on a

$$T_2 \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)^2 - 1 = \frac{1}{2} \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Notation

Ici on identifie le polynôme P avec la fonction polynomiale associée.

Remarque

Puisque $2XT_n$ et T_{n-1} ont des degrés distincts, le degré de la somme est le max des degrés.

Remarque

On aurait bien entendu pu constater que ceci était vrai sur les premières valeurs de n et effectuer une récurrence (double).

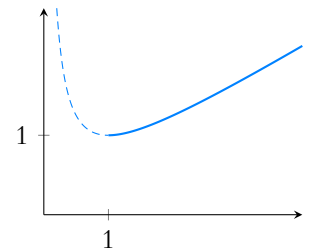


FIGURE 0.1– La fonction φ .

¹ Car dérivable.

Donc la récurrence est initialisée.

Supposons la propriété vraie au rang n et au rang $n + 1$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)T_n\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) - T_{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \frac{1}{2}\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Donc la formule est vraie au rang $n + 1$ et par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, \quad T_n\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

3.b. Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors

$$T_n(x) = T_n(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = \varphi\left(\left(\varphi^{-1}(x)\right)^n\right) > 1.$$

Prouvons par récurrence simple sur n , à x fixé, que $T_n(x) \leq 2^{n-1}x^n$. Pour $n = 1$, c'est évident.

Supposons que $T_n(x) \leq 2^{n-1}x^n$. Alors

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \leq 2xT_n(x) \leq 2x2^{n-1}x^n \leq 2^n x^{n+1}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x > 1$, $T_n(x) \geq 2^{n-1}x^n$.

3.c. Par la question 3.b, T_n ne possède pas de racines dans $]1, +\infty[$, et 1 n'est pas non plus racine de T_n . Donc T_n ne possède pas de racine dans $[1, +\infty[$.

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|T_n(-x)| = |T_n(x)|$, alors T_n ne possède pas non plus de racine dans $] -\infty, -1]$, et donc toutes ses racines réelles² sont dans $] -1, 1[$.

4. Racines de T_n

4.a. Fixons $\theta \in \mathbf{R}$ et procédons par récurrence double sur n . Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident puisque

$$T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0\theta) \text{ et } T_1(\cos \theta) = \cos(\theta).$$

Supposons que $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos \theta) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$. Par le principe de récurrence double,

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

Remarque : Cette formule n'est pas sans lien avec la propriété prouvée en 3.a.

$$\begin{aligned} \text{En effet, pour } x = e^{i\theta}, \text{ on a } \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

$$\text{Et de même, } \frac{1}{2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \cos(n\theta).$$

Malheureusement, $e^{i\theta}$ n'est pas dans $]1, +\infty[$ et donc ce raisonnement ne saurait être valable (en tous cas pas sans prouver que la relation de 3.a reste vraie pour $x \in \mathbf{C}^*$).

Pour $x \in [-1, 1]$, on a donc $x = \cos(\text{Arccos } x)$, et donc

$$|T_n(x)| = |\cos(n \text{Arccos}(x))| \leq 1.$$

Donc $M(T_n) \leq 1$, mais puisque $|T_n(1)| = 1$, $M(T_n) = 1$.

Remarque

La formule prouvée à la question précédente est :

$$\forall x > 1, T_n(\varphi(x)) = \varphi(x^n).$$

² Sous réserve qu'il en existe ! Ce que nous savons déjà si n est impair car tout polynôme à coefficients réels et de degré impair possède au moins une racine.

Rappel

On a $\cos(a) + \cos(b)$

$$= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

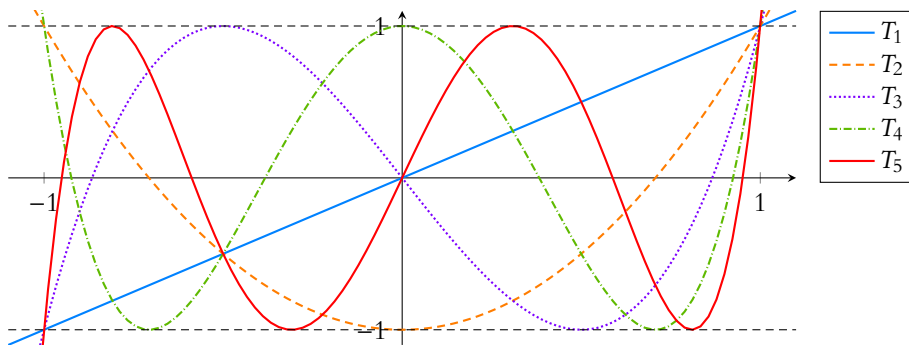


FIGURE 0.2 – Les premiers polynômes de Tchebychev. On constate que pour $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) \in [-1, 1]$.

- 4.b. Pour $x \in [-1, 1]$, on a $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos(\text{Arccos}(x))) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \text{Arccos}(x)) = 0$.
C'est le cas si et seulement si $n \text{Arccos}(x) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
Mais $0 \leq n \text{Arccos}(x) \leq n\pi$. Donc on aura

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, n \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Ainsi, les $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$ sont des racines de T_n , deux à deux distinctes car \cos est injective sur $[0, \pi]$.

Donc T_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$. Or T_n est de degré n , il est donc scindé à racines simples. Et donc³

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \right).$$

5. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{(n-k)\pi}{n} > \frac{(n-(k+1))\pi}{n}$, et donc par stricte décroissance de \cos sur $[0, \pi]$, $\alpha_k < \alpha_{k+1}$. Il est évident que $\alpha_0 = \cos(\pi) = -1$ et $\alpha_n = \cos(0) = 1$.
D'autre part, pour $x \in [-1, 1]$, on a $|T_n(x)| = M(T_n) = 1$ si et seulement si

$$T_n(\cos(\text{Arccos}(x))) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(n \text{Arccos}(x)) = \pm 1 \Leftrightarrow n \text{Arccos}(x) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Puisque $n \text{Arccos}(x) \in [0, n\pi]$, on a donc $|T_n(x)| = 1$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $n \text{Arccos}(x) = k\pi \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Or, $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \alpha_{n-k}$.

Et donc $\boxed{\text{pour } x \in [-1, 1], |T_n(x)| = M(T_n) \text{ si et seulement si } x \in \{\alpha_k, 0 \leq k \leq n\}}$.

6. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors les racines de L_k sont les α_i , $i \neq k$, et donc sont toutes dans $[-1, 1]$.
Donc L_k ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ et donc⁴ est de signe constant sur $]1, +\infty[$.
Mais ce signe est celui de son coefficient dominant (puisque'il tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$, le signe étant déterminé par celui du coefficient dominant), qui est $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{\alpha_k - \alpha_i}$.

Cette quantité est de même signe que $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (\alpha_k - \alpha_i)$.

Or, pour $i < k$, $\alpha_k - \alpha_i > 0$ et pour $i > k$, $\alpha_k - \alpha_i < 0$.

Donc le produit comporte $n-k$ termes négatifs et k termes positifs : il est du signe de $(-1)^{n-k}$. On en déduit que pour $x \geq 1$, $(-1)^{n-k} L_k(x) \geq 0$.

Puisque T_n est de degré n , il vérifie⁵ $T_n = \sum_{k=0}^n T_n(\alpha_k) L_k$.

Mais $T_n(\alpha_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)\right) = \cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k}$.

Donc $T_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} L_i$.

³ N'oublions pas le coefficient dominant dans la décomposition en produit d'irréductibles !

⁴ C'est le théorème des valeurs intermédiaires.

⁵ C'est la décomposition de T_n dans la base (L_0, \dots, L_n) de $\mathbf{R}_n[X]$.

Et en particulier, pour $x \geq 1$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} L_k(x) = \boxed{\sum_{k=0}^n |L_k(x)|}$.

7. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors pour tout $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)| \cdot |L_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^n M(P) |L_k(x)| \leq M(P) \sum_{k=0}^n |L_k(x)| \leq M(P) T_n(x). \end{aligned}$$

Théorème d'interpolation de Lagrange.

Inégalité triangulaire.

Détails

Puisque $\alpha_k \in [-1, 1]$,
 $|P(\alpha_k)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$.

8. On sait que pour $x \geq 1$, $M(P) \geq \frac{|P(x)|}{T_n(x)}$.
 Or, en utilisant la question 3.b, $T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n$, donc

$$M(P) \geq \frac{|P(x)|}{T_n(x)} \geq \frac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n}.$$

Mais P étant unitaire et de degré n , $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$, et donc $|P(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$, de sorte que
 $\frac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n-1}}$.

Donc en passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, il vient $\boxed{M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}}$.

Détail

Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

9. Le polynôme $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est unitaire, de degré n et vérifie

$$M(P) = \frac{1}{2^{n-1}} M(T_n) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Commentaires : ce que nous venons de prouver, c'est qu'un polynôme unitaire de degré n ne peut pas rester trop proche de 0 sur $[-1, 1]$ en ce sens qu'il sort de l'intervalle $\left] -\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}} \right[$. Et la borne est atteinte pour un multiple des polynômes de Tchebychev (on pourrait en réalité prouver qu'il s'agit des seuls).

Bien entendu, ceci ne vaut plus pour un polynôme qui n'est pas unitaire, car en divisant n'importe quel polynôme de degré n par une constante suffisamment grande, on peut le forcer à ne prendre que des valeurs très petites sur $[-1, 1]$.

► Exercice 2 : une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.

1.a. L'ensemble $\{|P(z)|, z \in \mathbf{C}\}$ est une partie non vide et minorée⁶ de \mathbf{R} , donc possède une borne inférieure.

⁶ Par 0.

1.b. Soit $z \in \mathbf{C}^*$, et soit $r = |z|$. Alors

$$|a_p z^p| = \left| P(z) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k \right| \leq |P(z)| + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k.$$

Et donc $|a_p| r^p \leq |P(z)| + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k$, soit encore $\boxed{|P(z)| \geq |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k}$.

1.c. Puisque $a_p \neq 0$ (par définition du degré de P), $|a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} |a_p| r^p \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc pour tout $A > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour $r > r_0$,

$$|a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k > A.$$

Équivalent

Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

Et alors d'après la question 1.b, pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > r_0$, on a bien

$$|P(z)| \geq |a_p|r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|r^k > A.$$

- 1.d.** Prenons $A = \alpha + 1$, et notons r_0 la valeur correspondante dans la question précédente. Soit alors $\varepsilon \in]0, 1[$. Alors il existe $t \in \mathbf{C}$ tel que $|P(t)| \leq \alpha + \varepsilon$. Et donc par définition de r_0 , $|t| \leq r_0$. Et donc $|P(t)| \in \{|P(z)|, 0 \leq |z| \leq r_0\}$. Par ailleurs, il est évident que α est un minorant de ce dernier ensemble, et donc par caractérisation « epsilonlesque » des bornes inférieures, en est la borne inférieure.
- 2.a.** Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de \mathcal{P} qui converge vers α . Mais par définition, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $z_n \in \mathbf{C}$ tel que $x_n = |P(z_n)|$. Donc on a bien $|P(z_n)| = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.
- 2.b.** Prenons $A = \alpha + 1$ dans la question 1.c. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que pour $|z| > r_0$, $|P(z)| > \alpha + 1$. Mais pour n suffisamment grand, on a $|P(z_n)| \leq \alpha + 1$, et donc $|z_n| \leq r_0$. Ceci prouve donc que la suite (z_n) est bornée.
- 2.c.** La suite (z_n) étant bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(z_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un complexe y . Mais alors, par somme et produit de limites,

$$P(z_{\varphi(n)}) = \sum_{k=0}^p a_k z_{\varphi(n)}^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p a_k y^k = P(y).$$

Ceci prouve donc que la suite $(P(z_n))_n$ converge vers le complexe $P(y)$. Et donc on a bien $|P(y)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |P(z_{\varphi(n)})| = \alpha$.

- 3.a.** Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $|P(z+y)| \geq |\alpha|$ et donc $|Q(z)| \geq \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. De plus, $Q(0) = \frac{P(y)}{P(y)} = 1$, donc $\inf\{|Q(z)|, z \in \mathbf{C}\} = 1$.
- 3.b.** Il suffit de noter q le degré du plus petit coefficient non nul de $Q - 1$. Pour le dire autrement, $q - 1$ est la multiplicité de 0 comme racine de $Q - 1$.
- 3.c.** On a $Q\left(re^{-i\frac{\theta}{q}}\right) = 1 - \underbrace{\rho r^q}_{=1} e^{i\theta} b_k + \sum_{k=q+1}^p b_k r^k e^{-i\frac{\theta k}{q}}$.

Et donc par l'inégalité triangulaire,

$$\left|Q\left(re^{-i\frac{\theta}{q}}\right)\right| \leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k.$$

Mais pour $0 \leq r < \frac{1}{\rho}$, on a $0 \leq \rho r^q < \rho r \leq 1$, et donc $1 - \rho r^q \geq 0$. Et donc $|1 - \rho r^q| = 1 - \rho r^q$. On a donc bien, en posant $r_0 = \frac{1}{\rho}$: pour tout $r \leq r_0$,

$$\left|Q\left(re^{-i\frac{\theta}{q}}\right)\right| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k.$$

- 3.d.** Lorsque $r \rightarrow 0$, $-\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k \underset{r \rightarrow 0}{\sim} -\rho r^q$. Mais deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe au voisinage de 0. Et donc il existe $r_1 > 0$ tel que pour $0 < r < r_1$, $-\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k < 0$. Et donc pour $0 < r < \min(r_0, r_1)$, $\left|Q\left(re^{-i\frac{\theta}{q}}\right)\right| < 1$. Ceci contredit la question 3.a, si bien que $\alpha = 0$.

- 4.** Le complexe y de la question 2.c vérifie donc $|P(y)| = 0$, et donc est une racine de P . Nous avons donc prouvé que tout polynôme non constant à coefficients complexes possède une racine dans \mathbf{C} , c'est bien le théorème de d'Alembert-Gauss.

Remarque

En réalité, nous avons seulement prouvé qu'elle était bornée à partir d'un certain rang, mais en prenant en compte les premiers termes, on prouve que ceci est équivalent à demander qu'elle soit bornée.

Autrement dit

Nous venons de prouver que α n'est juste un inf, mais que c'est le minimum de \mathcal{P} . Reste à prouver que ce minimum est nul...

Rappel

En 0, un polynôme est équivalent à son terme non nul de plus bas degré.