DEVOIR MAISON 13

▸ Problème : polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Partie I. Fonctions uniformément continues et théorème de Heine

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est dite uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que si $f : I \to \mathbf{R}$ est uniformément continue, alors elle est continue.
2. On suppose dans cette question que I est un segment $[a,b]$, avec $a < b$.
   On souhaite prouver que si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue sur I, alors elle est uniformément continue (*théorème de Heine*).
   On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas uniformément continue. Ainsi, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $(x,y) \in I^2$ vérifiant $|x-y| < \eta$ et $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$. Dans la suite, on se fixe un tel $\varepsilon > 0$.
   a. Justifier qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans I telles que
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \textbf{ et } |f(x_n)-f(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$
   b. Prouver qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ et un réel $c \in I$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = c$.
   c. Aboutir à une contradiction.

Partie II. Polynômes de Bernstein

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \in \mathbf{R}[X]$.

3. Déterminer le degré de $B_{n,k}$, ses racines et leur multiplicité, pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé, et soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. On souhaite prouver qu'il existe un unique $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k}$.
   a. En utilisant les racines des $B_{n,k}$, justifier qu'un tel $(n+1)$-uplet, s'il existe, est unique.
   b. À l'aide de l'identité $X^k = X^k(X+(1-X))^{n-k}$, prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $X^k = \dfrac{1}{\binom{n}{k}} \sum\limits_{j=k}^{n} \binom{j}{k} B_{n,j}$.
   c. Conclure.
5. Prouver que pour $n \in \mathbf{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = n(n-1)X^2$.
6. En déduire que pour $n \in \mathbf{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nX)^2 B_{n,k} = nX(1-X)$.

Partie III. Approximation uniforme d'une fonction continue

Si $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, on note $\|g\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$, qui est bien défini par le théorème des bornes atteintes.

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $B_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) B_{n,k} \in \mathbf{R}_n[X]$.

On souhaite prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$, $\forall n \geqslant n_0$, $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère $\varepsilon > 0$ fixé. Par le théorème de Heine, il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2$, $|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

7. Prouver que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x) - [B_n(f)](x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x)$.

8. Soit $x \in [0, 1]$ fixé et $n \in \mathbf{N}^*$. On note $A_x = \left\{ k \in [\![0, n]\!],\ \left| x - \dfrac{k}{n} \right| < \eta \right\}$, et on note B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0, n]\!]$.

   a. Prouver que $\displaystyle\sum_{k \in A_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) < \varepsilon$.

   b. Montrer que $\eta^2 \displaystyle\sum_{k \in B_x} B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k \in B_x} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} (nx - k)^2 B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n}$.

   c. Montrer que $\displaystyle\sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$.

   d. En déduire que $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$.

      Conclure.

Ainsi, on a prouvé que pour toute fonction continue f sur $[0, 1]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. Ce qui signifie que les courbes représentatives de f et de P sont toujours à une distance inférieure à ε. C'est le théorème de Weierstrass, que vous reformulerez en seconde année en disant que les fonctions polynomiale sont denses (en un sens à préciser) dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$.
Le théorème se généralise sans difficultés au cas d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Partie IV. Convergence uniforme (partie facultative)

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)| = \sup\{|f(x)|,\ x \in I\}$.

Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, et soit $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n - f$ est bornée et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Ainsi, la partie précédente prouve que pour $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$, $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f.

9. Prouver que si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors $\forall x \in I$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ (on parle de convergence simple).
   Énoncer (et prouver) alors un résultat d'unicité de la limite uniforme.

10. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit une fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{n}{1 + n(1 + x)}$. Prouver que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction que l'on précisera.

11. Prouver que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur I, qui converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue sur I.
    Indication : pour $(x, y) \in I^2$ et $n \in \mathbf{N}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f(y) - f_n(y)|$.
    En déduire que si on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, \pi]$, $f_n(x) = \sin^n(x)$, alors $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément.

12. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f.

    a. Prouver qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \geqslant n_0$, $|P_n(x) - P_{n_0}(x)| < 2$.

    b. En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0)$.

    c. Montrer alors que f est une fonction polynomiale.

    On a donc prouvé que sur $\mathbf{R}$, les seules fonctions qui sont limites uniformes de fonctions polynomiales sont les fonctions polynomiales, et donc que le théorème de Weierstrass ne se généralise pas à $\mathbf{R}$ tout entier.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 13

Partie I. Fonctions uniformément continues et théorème de Heine

1. Soit $x_0 \in I$. Alors f est continue sur en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors si f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
En particulier, pour $y = x_0$, pour tout $x \in I$, $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Et donc f est bien continue en x_0, et ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, $\boxed{\text{elle est continue sur } I.}$

2.a. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, prenons $\eta = \frac{1}{n}$: par hypothèse, il existe alors $(x_n, y_n) \in I^2$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.

2.b. Puisque la suite (x_n) est bornée[1], il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers un réel c.
Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite, $a \leqslant c \leqslant b$, donc $c \in I$.
Enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leqslant \frac{1}{\varphi(n)}$.
Or, nous savons[2] que toute extractrice diverge vers $+\infty$, et donc $\frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, de sorte que $\lim_{n \to +\infty} (x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}) = 0$, et donc $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$.

[1] Elle est à valeurs dans $I = [a, b]$.

[2] Ceci a été prouvé en cours.

2.c. Par continuité de f, on a donc $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(c)$, et de même $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$.
Et donc $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Ceci contredit le fait que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon$.
Et donc c'est notre hypothèse de départ qui est fausse : $\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } I.}$

Partie II. Polynômes de Bernstein

3. Soit $n \in \mathbf{N}$, et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $\deg\left(X^k(1-X)^{n-k}\right) = n$, et puisque $\binom{n}{k} \neq 0$, $\deg B_{n,k} = \deg X^k(1-X)^{n-k} = n$.
Puisque $B_{n,k}$ a pour forme scindée $B_{n,k} = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}X^k(X-1)^{n-k}$, ses racines sont évidemment 0 et 1, de multiplicités respectives k et $n - k$.
Avec tout de même une précision : $B_{n,0} = (1 - X)^n$ ne possède que 1 pour racine, et $B_{n,n} = X^n$ ne possède que 0 pour racine.

4.a. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_0, \dots, \mu_n$ des réels tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \mu_k B_{n,k}$.

Alors $\sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \mu_k) B_{n,k} = 0_{\mathbf{R}[X]}$.

Évaluons cette relation en $X = 1$: $\sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \mu_k) \underbrace{B_{n,k}(1)}_{=0 \text{ si } k<n} = 0 \Leftrightarrow \lambda_n - \mu_n = 0$.

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \mu_k) B_{n,k} = 0_{\mathbf{R}[X]}$.

Par dérivation, puis (ré-)évaluation en 1, il vient $\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \mu_k) B'_{n,k}(1) = 0$.

Mais 1 est racine de multiplicité supérieure ou égale à 2 de $B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n-2}$, et racine simple de $B_{n,n-1}$, donc $B'_{n,0}(1) = \dots = B'_{n,n-2}(1) = 0$ et $B'_{n,n-1}(1) \neq 0$.
Il reste donc $(\lambda_{n-1} - \mu_{n-1}) B'_{n,n-1}(1) = 0$ et donc $\lambda_{n-1} = \mu_{n-1}$.

Ne reste alors que $\sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k B_{n,k} = 0_{\mathbf{R}[X]}$.

En dérivant de nouveau puis en évaluant en $X = 1$, il vient $\lambda_{n-2} = \mu_{n-2}$, et de proche en proche, on prouve que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = \mu_k$.
Donc $\boxed{\text{une telle écriture de } P \text{, si elle existe, est unique.}}$

Remarque
Si vous observez bien la structure de la preuve ci-dessus, vous remarquerez une stratégie de preuve qu'on utilisera beaucoup dans quelques temps : pour montrer que tout polynôme se décompose de manière unique, il nous a suffit de prouver que le polynôme nul se décompose de manière unique.

4.b. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'identité fournie par l'énoncé est évidemment vraie, et donc

$$\begin{aligned}
X^k = X^k(X+(1-X))^{n-k} &= X^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^i (1-X)^{n-k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^{k+i}(1-X)^{n-k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{\binom{n-k}{i}}{\binom{n}{k+i}} B_{n,k+i} = \sum_{j=k}^{n} \frac{\binom{n-k}{j-k}}{\binom{n}{j}} B_{n,j} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{(n-k)!}{\cancel{(n-j)!}(j-k)!} \frac{j!\cancel{(n-j)!}}{n!} B_{n,j} = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{\cancel{k!}(j-k)!} \frac{\cancel{k!}(n-k)!}{n!} B_{n,j} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_{n,j} = \boxed{\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k} \binom{j}{k} B_{n,j}.}
\end{aligned}$$

Binôme.

Chgt d'indice $j = k + i$.

4.c. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}_n[X]$, alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \binom{j}{k} B_{n,j}.$$

Ainsi, il existe bien $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k}$. Ce $(n+1)$-uplet est nécessairement unique d'après la question 4.a.

5. On a facilement

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1^n = \boxed{1.}$$

Par ailleurs, en se rappelant que pour $k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} = n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^{i+1}(1-X)^{n-(i+1)} \\
&= nX \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^i (1-X)^{(n-1)-i} = nX(X+(1-X))^{n-1} = \boxed{nX.}
\end{aligned}$$

Le terme correspondant à $k = 0$ est nul.

Chgt d'indice $i = k - 1$.

Et de même, avec pour $k \geqslant 2$, $k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)n\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-2} n(n-1)\binom{n-2}{i} X^{i+2}(1-X)^{n-2-i} \\
&= n(n-1)X^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} X^i (1-X)^{n-2-i} = n(n-1)X(X+(1-X))^{n-2} = \boxed{n(n-1)X^2.}
\end{aligned}$$

6. Notons que pour $n \in \mathbf{N}$, et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(k-nX)^2 = k^2 - 2knX + n^2X^2 = k(k-1) + k - 2knX + n^2X^2 = k(k-1) + k(1-2nX) + n^2X^2.$$

Et alors il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2B_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}+(1-2nX)\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}+n^2X^2\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}\\ &= n(n-1)X^2+(1-2nX)nX+n^2X^2\\ &= -nX^2+nX = \boxed{nX(1-X).}\end{aligned}$$

Partie III. Approximation uniforme d'une fonction continue

7. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$. Alors

$$f(x)-[B(f_n)](x) = f(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x).}$$

8.a. Pour $k \in A_x$, on a $\left|x-\frac{k}{n}\right| < \eta$, et donc $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$.
Puisque par ailleurs, les $B_{n,k}$ sont à valeurs positives sur $[0,1]$, il vient

$$\sum_{k\in A_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x) < \varepsilon\sum_{k\in A_x}B_{n,k}(x) \leqslant \varepsilon\underbrace{\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)}_{=1} \leqslant \boxed{\varepsilon.}$$

Positivité
La positivité des $B_{n,k}(x)$ est importante ici, puisqu'elle justifie que la somme augmente lorsqu'on ajoute les $k \notin A_x$.

8.b. Pour $k \in B_x$, on a $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \eta$, et donc $\eta^2 \leqslant \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}(nx-k)^2$, et donc après multiplication par $B_{n,k}(x) \geqslant 0$ et en sommant pour $k \in B_x$,

$$\eta^2\sum_{k\in B_x}B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k\in B_x}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k\in B_x}(nx-k)^2B_{n,k}(x).$$

Notons alors qu'en ajoutant les termes correspondant à $k \in A_x$, qui sont positifs, on obtient à l'aide de la question 6

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k\in B_x}(nx-k)^2B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{n^2}nx(1-x).$$

Reste alors à remarquer que la fonction $x \mapsto x(1-x)$ possède sur $[0,1]$ un maximum atteint en $x = \frac{1}{2}$, et qui vaut $\frac{1}{4}$, de sorte que $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, et donc on a bien l'inégalité annoncée.

Signe
Si l'on précise le signe de $B_{n,k}(x)$, c'est bien pour garantir que le sens des inégalités est préservé.

Maximum
Ce maximum peut se trouver facilement à l'aide d'un tableau de variations, mais vous pouvez aussi le retrouver à l'aide d'une formule classique qui affirme qu'une fonction de la forme $x \mapsto ax^2+bx+c$ atteint un extremum en $x = -\frac{b}{2a}$.

8.c. Pour $k \in B_x$, on a

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant |f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

Et donc

$$\sum_{k\in B_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x) \leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{k\in B_x}B_{n,k}(x) \leqslant \boxed{\frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2}}.$$

8.d. Soit $x \in [0,1]$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\\ &\leqslant \sum_{k\in A_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)+\sum_{k\in B_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\\ &< \varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.\end{aligned}$$

Soit donc $n \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{2\varepsilon\eta^2}$ de sorte que $.\frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)-[B_n(f)](x)| < 2\varepsilon.$$

Et donc $\|f-B_n(f)\|_\infty < 2\varepsilon$.
Nous venons donc de prouver que pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\|f-B_n(f)\|_\infty < 2\varepsilon$.
Et donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-B_n(f)\|_\infty = 0$.

Partie IV. Convergence uniforme

Si f est une fonction bornée, $\|f\|_\infty$ est le plus petit majorant de $|f|$.
Graphiquement, c'est donc le plus petit M tel que le graphe de f soit compris entre $-M$ et M.
Et si f et g sont deux fonctions, alors $f-g$ représente l'écart entre les deux. Donc $\|f-g\|_\infty$ est l'écart maximal entre ces deux fonctions.

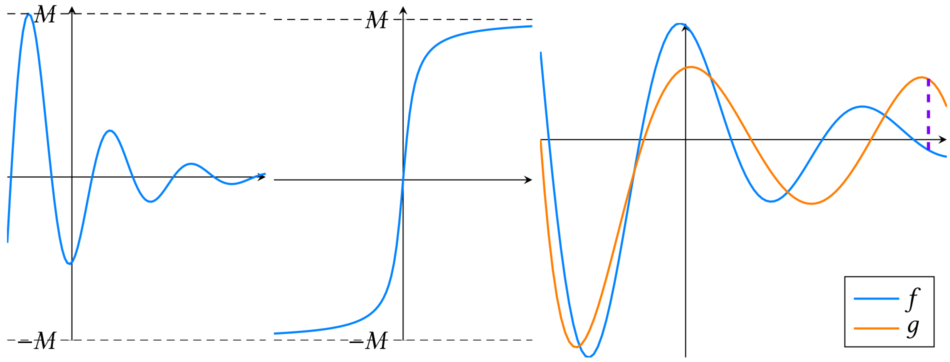


FIGURE 0.1 – A gauche et au milieu : $M = \|f\|_\infty$. Figure de droite : $\|f-g\|_\infty$ est la longueur du segment pointillé.

9. Si (f_n) converge uniformément vers f, alors pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbf{N}$,
$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc nécessairement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).}$

On a alors unicité de la limite au sens où si f et g sont deux fonctions définies sur I telles que $(f_n)_n$ converge uniformément à la fois vers f et vers g, alors $f = g$.
En effet, on a alors pour tout $x \in I$, par unicité de la limite d'une suite de réels,
$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$.

10. La question précédente nous aide à trouver vers quelle fonction est susceptible de converger uniformément f : pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n(1+x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x}.$$

Soit donc $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{1+n(1+x)} - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{n(1+x) - 1 - n(1+x)}{(1+x)(1+n(1+x))}\right| = \left|\frac{1}{(1+x)(1+n(1+x))}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Et donc $f_n - f$ est bien bornée, et $\frac{1}{n+1}$ en est un majorant, de sorte que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Et donc en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

> **Rappel**
> La borne supérieure est le plus petit des majorants.

Donc $\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f.}$

11. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x,y) \in I^2$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.
Et donc en particulier, pour $n = n_0$, $|f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \|f - f_{n_0}\|_\infty < \varepsilon$ et de même $|f(y) - f_{n_0}(y)| \leqslant \|f - f_{n_0}\|_\infty < \varepsilon$.
Par ailleurs, f_{n_0} est continue, donc pour $x_0 \in I$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|y - x_0| < \eta$, $|f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$.
Et donc pour $y \in I$ tel que $|y - x_0| < \eta$,

$$|f(y) - f(x_0)| \leqslant |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$

Nous avons donc bien prouvé que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x_0 - y| < \eta$, alors $|f(y) - f(x_0)| < 3\varepsilon$.

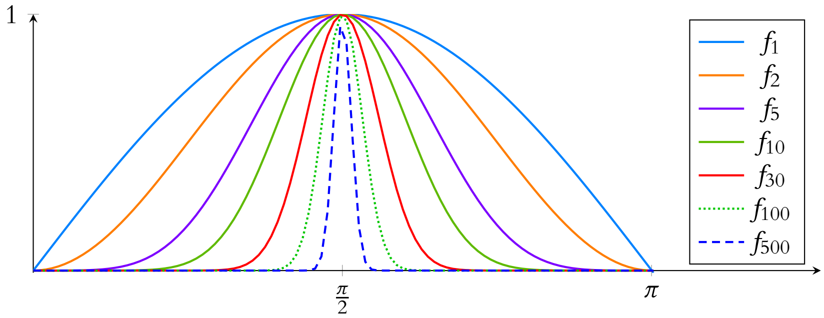
Autrement dit, f est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

Supposons par l'absurde que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

Puisque pour tout $x \in [0, \pi]$, $f_n(x) = \sin^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, la convergence uniforme ne peut se produire que vers

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais cette fonction f n'est évidemment pas continue en $\frac{\pi}{2}$, alors que les f_n le sont, ce qui



contredit la première partie de la question.
Donc $\boxed{(f_n)_n \text{ ne converge pas uniformément.}}$

12.a. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|P_n - f\|_\infty < 1$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, et $x \in \mathbf{R}$,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_{n_0}(x)| \leqslant \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_{n_0}\|_\infty < 2.$$

12.b. Soit $n \geqslant n_0$. Alors la fonction $P_n - P_{n_0}$ est une fonction polynomiale. Elle est bornée sur $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est constante[3]
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P_n(x) - P_{n_0}(x) = P_n(0) - P_{n_0}(0) \Leftrightarrow P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0)$.

12.c. Passons à la limite dans l'égalité précédente (toujours à x fixé) :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \boxed{P_n(x) = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0).}$$

Puisque P_{n_0} est polynomiale, et que $f(0) - P_{n_0}(0)$ est une constante, f est bien une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Détails
À x fixé, $(f_n(x))_n$ est une suite géométrique dont la raison est toujours dans $[0, 1[$, sauf si $x = \frac{\pi}{2}$, auquel cas elle vaut 1.

[3] Sinon elle tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$.