Devoir maison 13

▸ Problème : une équation fonctionnelle

Dans ce problème, nous allons nous intéresser aux fonctions $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, **continues** et **majorées**, telles que $\forall x \in \mathbf{R}_+, f(2x) = 2f(x)^2 - 1$. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des telles fonctions.

Partie I. Généralité sur les éléments de $\mathscr{E}$.

1. Vérifier que pour tout $\omega \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto \cos(\omega x)$ est dans $\mathscr{E}$.
2. Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que f est minorée par -1.
3. Soit $\alpha > 1$. On définit alors une suite (u_n) en posant $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.
   a. Montrer que (u_n) est croissante, et qu'elle diverge vers $+\infty$.
   b. En déduire que toute fonction f de $\mathscr{E}$ est majorée par 1.

Partie II. Sur les solutions de l'équation $f(x) = y$

Dans cette partie, f est un élément de $\mathscr{E}$ qui s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}_+$, et on fixe $t_0 \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(t_0) = 0$.

4. Calculer $f(2t_0)$. En déduire que $f(\mathbf{R}_+) = [-1, 1]$.

Pour tout $y \in [-1, 1]$, on note $A_y = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid f(x) = y\}$ l'ensemble des antécédents de y par f, qui est donc non vide par la question précédente.

5. Soit $x_0 \in A_{-1}$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[x_0, 2x_0]$, puis que $A_{-1} \cap [2x_0, +\infty[\neq \emptyset$.
6. Justifier qu'il existe des antécédents de -1 par f aussi grands que l'on veut. Autrement dit, que pour tout $B \in \mathbf{R}_+$, il existe au moins un antécédent de -1 par f qui est supérieur ou égal à B.
   Une formulation équivalente serait de dire que $+\infty$ est adhérent à A_{-1}.
7. Soit $y \in [-1, 1]$. Justifier qu'il existe des antécédents de y par f aussi grands que l'on veut.
8. Soit $y \in [-1, 1]$ différent de 1 et de $-\frac{1}{2}$. On note alors $t = \inf A_y$.
   a. Justifier que t est bien défini.
   b. Montrer que $t > 0$, puis que $t = \min A_y$.
   En d'autres termes, y possède un plus petit antécédent par f.

Partie III. Détermination des fonctions de $\mathscr{E}$ satisfaisant une condition de limite

9. a. En exprimant $\cos x$ à l'aide de $\sin \frac{x}{2}$, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
   b. Soit $\omega \in \mathbf{R}_+$. En utilisant la question précédente, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\omega x)}{x^2} = \dfrac{\omega^2}{2}$.

Dans toute la suite du sujet, on considère une fonction $f \in \mathscr{E}$ fixée, qui s'annule au moins une fois, et telle qu'il existe un réel ℓ tel que $\dfrac{1-f(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ell$.

10. Calculer $f(0)$ et prouver que $\ell \geqslant 0$.
11. Soit $x \geqslant 0$ tel que $f(x) \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note alors $\theta_n = \operatorname{Arccos} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, qui est bien défini puisque f est à valeurs dans $[-1, 1]$.
    a. Justifier qu'à partir d'un certain rang N, on a $\theta_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
    b. Soit $n \geqslant N$. Calculer $\cos(2\theta_{n+1})$ et en déduire que $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$, puis que $2^n\theta_n = 2^N\theta_N$.

c. Vérifier que pour $n \geqslant N$, on a

$$(2^n\theta_n)^2 \times \frac{1-\cos\theta_n}{\theta_n^2} = x^2 \times \frac{1-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}.$$

d. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que $2^N\theta_N = x\sqrt{2\ell}$, et que donc

$$f\left(\frac{x}{2^N}\right) = \cos\theta_N = \cos\left(\frac{x\sqrt{2\ell}}{2^N}\right).$$

e. Prouver alors que $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2\ell}\right)$.

12. Montrer que $\ell > 0$.

13. Prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha[$, $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2\ell}\right)$.

14. Justifier que finalement, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2\ell}\right)$.