

DM12 : Indications

Problème

► 1) Une factorisation bien connue prouve que $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ est un entier.

On pourra montrer que cet entier n'est pas divisible par p en travaillant modulo p .

► 2)a) Partir de $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, et montrer que $2 \mid x + y$ mais que $4 \nmid x + y$.

► 2)b) Procéder par récurrence forte sur n , en notant que si $n + 1 = 2^k q$ avec $k \geq 1$, alors $x^{n+1} - y^{n+1} = (x^{2^{k-1}q})^2 - (y^{2^{k-1}q})^2$.

► 3)a) Utiliser $x = y + (x - y)$, puis un binôme, que l'on pourra passer modulo p^2 .

► 3)b) Utiliser la question précédente pour exprimer la somme uniquement en fonction de y . On notera alors qu'on sait calculer $\sum_{k=1}^{p-1} k$, et prouver que cette somme est divisible par p .