DM12 : Indications

Problème

► 2.b. L'inclusion $\{\mathrm{id}, r, \dots, r^{n-1}\} \subset \langle r \rangle$ est évidente.
Par l'inclusion réciproque, prouver que pour $r^k \in \langle r \rangle$, $r^k = r^a$, où a est le reste de la division euclidienne de k par n.
► 2.c. Pour la deuxième partie de la question, on peut faire une récurrence, ou noter que $sr^ks = (srs)^k$.
► 2.d. La stabilité par produit se prouve à l'aide de la question 2.c.
Pour le cardinal, on pourra montrer que $\{sg, g \in \langle r \rangle\}$ est en bijection avec $\langle r \rangle$, puis que cet ensemble est disjoint de $\langle r \rangle$.
► 4.b. Montrer à l'aide de 4.a. qu'on est en présence d'une partie non vide $\mathbb{N}^*$.
► 4.c. Raisonner comme à la question 2.b avec une division euclidienne.
Pour en déduire que $p = \mathrm{ord}(g)$, il ne faut pas oublier de prouver que $e, g, g^2, \dots, g^{p-1}$ sont deux à deux distincts.
► 7.b. Pour l'injectivité, penser à la caractérisation de l'injectivité par le noyau.
► 9.a. Si g est d'ordre 8, alors $\langle g \rangle$ est un sous-groupe de G isomorphe à U_8, et donc en particulier de cardinal 8.
► 9.c. À l'aide de la question 7, prouver que G contient un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}_2$, puis appliquer de nouveau la question 7.
► 9.d.i. Si $\mathrm{ord}(b) = 2$, $c = b$ convient.
Sinon prouver que b^2 est d'ordre 2. Et dans le cas où $b^2 \in \langle a \rangle$, remarquer que le seul élément d'ordre 2 de $\langle a \rangle$ est a^2.
► 11. Justifier que ces 8 éléments sont deux à deux distincts, et donc leur ensemble est déjà de même cardinal que G.
► 12. Justifier que ab ne peut être égal à aucun des 7 autres éléments de G.
► 15. Pour prouver que $\mathfrak{Q}$ et D_4 ne sont pas isomorphes, noter qu'ils n'ont pas le même nombre d'éléments d'ordre 2.