DEVOIR MAISON 11

▸ Problème : étude du groupe des transformations affines de R

1. Si G est un groupe, on note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe. *Indication : montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe bien connu.*

Partie I. Un exemple de produit semi-direct

Dans cette partie, on note $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. On définit une loi de composition interne $\star$ sur G par :

$$\forall (x,y) \in G,\ \forall (x',y') \in G,\ (x,y) \star (x',y') = (xx', y + xy').$$

2. Montrer que $\star$ est associative, et qu'elle possède un élément neutre que l'on déterminera.
3. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. Est-il abélien ?
4. Soit $H = \mathbf{R}^* \times \{0\}$ et $K = \{1\} \times \mathbf{R}$. Montrer que H et K sont deux sous-groupes de G.

Partie II. Les transformations affines de R.

Une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite affine si :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathbf{R},\ f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y).$$

On note $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ l'ensemble des applications affines de $\mathbf{R}$.

5. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(\mathbf{R}), \circ)$, où l'on rappelle que $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Pour $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on note $f_{a,b} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax + b \end{array} \right.$.

6. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $f_{a,b}$ est une application affine. À quelle condition est-elle bijective ?
7. Montrer que l'application $F : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbf{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & f_{a,b} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.
8. Montrer que F est un isomorphisme de groupes. En déduire que $(\mathrm{Aff}(\mathbf{R}), \circ)$ n'est pas un groupe abélien.

Partie III. Étude des automorphismes intérieurs de G

9. Pour $g \in G$, on note $\varphi_g : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & g \star h \star g^{-1} \end{array} \right.$, où g^{-1} désigne l'inverse de g pour la loi $\star$.
   Montrer que φ_g est un automorphisme de G.
10. Montrer que pour tout $g \in G$, le sous-groupe K (défini à la question 4)· est stable par φ_g.
    Est-ce que H est stable par φ_g ?
    Dans la suite, pour $g \in G$, on notera $\widetilde{\varphi_g}$ la restriction de φ_g à K.
11. Justifier que pour $g \in G$, $\widetilde{\varphi_g}$ est un automorphisme de K.
12. Pour $h \in H$, on note $\Phi(h) = \widetilde{\varphi_h}$. Montrer que Φ est un morphisme de groupes de $(H, \star)$ dans $(\mathrm{Aut}(K), \circ)$.

Partie IV. (Facultative) Produit semi-direct de deux groupes

Dans cette partie, nous généralisons la construction du groupe G faite à la partie I, en définissant une nouvelle structure de groupes sur le produit cartésien de deux groupes.

On considère donc deux groupes $(H, \cdot)$ et $(K, \star)$, de neutres respectifs e_H et e_K, et on suppose qu'on dispose d'un morphisme de groupes $f : K \to \mathrm{Aut}(H)$.
On définit alors une loi de composition interne $*$ sur l'ensemble $G = H \times K$ définie de la manière suivante :

$$\forall (h_1, k_1) \in G,\ \forall (h_2, k_2) \in G,\ (h_1, k_1) * (h_2, k_2) = (h_1 \cdot f(k_1)(h_2), k_1 \star k_2).$$

13. Montrer que $(G, *)$ est un groupe, d'élément neutre (e_H, e_K), et que l'inverse de (h, k) est $(f(k^{-1})(h^{-1}), k^{-1})$.
La structure de groupe ainsi obtenue sur G est appelée produit semi-direct de H et K relativement à f, parfois noté $H \rtimes_f K$.
14. Montrer que le groupe G de la question 2 est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^*$ en précisant le morphisme f.
15. Dans le cas où $f : \left| \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H) \\ k & \longmapsto & \mathrm{id}_H \end{array} \right.$, reconnaître la loi $*$.
16. On note $H_1 = H \times \{e_K\}$ et $K_1 = \{e_H\} \times K$. Montrer que H_1 et K_1 sont deux sous-groupes de G, et que les applications $\varphi_H : \left| \begin{array}{ccc} H_1 & \longrightarrow & H \\ (h, e_K) & \longmapsto & h \end{array} \right.$ et $\varphi_K : \left| \begin{array}{ccc} K_1 & \longrightarrow & K \\ (e_H, k) & \longmapsto & k \end{array} \right.$ sont des isomorphismes.
17. **Un exemple : le groupe diédral d'ordre n**
Soit $n \geqslant 3$. On note $\mathbf{U}_n$ le groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, muni de sa structure habituelle de groupe. On note $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
    a. On note $\tau : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{U}_n & \longrightarrow & \mathbf{U}_n \\ \zeta^k & \longmapsto & \zeta^{-k} \end{array} \right.$. Montrer que τ est un automorphisme de $\mathbf{U}_n$.
    b. Soit $f : \mathbf{U}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbf{U}_n)$ défini par $f(1) = \mathrm{id}_{\mathbf{U}_n}$ et $f(-1) = \tau$.
    Montrer que f est un morphisme de groupes.
    c. On note D_{2n} le produit semi-direct de $\mathbf{U}_n$ par $\mathbf{U}_2$ relativement au morphisme f de la question précédente.
    d. On note respectivement r et s les deux éléments $(\zeta_n, 1)$ et $(1, -1)$ de D_{2n}. Montrer que $r^n = s^2 = e_{D_{2n}}$, et que $sr = r^{-1}s$.
    En déduire que bien qu'il soit également de cardinal $2n$, D_{2n} n'est pas isomorphe au groupe $\mathbf{U}_{2n}$.
    On pourrait prouver que le groupe D_{2n} est isomorphe au groupe des rotations et symétries préservant les sommets d'un polygone régulier à n côtés (par exemple les points d'affixes dans $\mathbf{U}_n$), r correspondant à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une symétrie axiale dont l'axe passe par deux sommets opposés si n est pair, ou par un sommet et le milieu du côté opposé si n est impair.
    Vous pouvez d'ailleurs essayer de vous convaincre géométriquement qu'on a bien $r^n = s^2 = 1$ et $sr = r^{-1}s$.

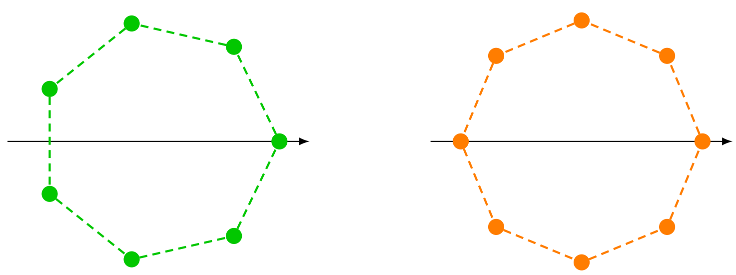

FIGURE 0.1 – Deux polygones à n côté (avec respectivement n impair et n pair) et l'axe de s.