Devoir maison 10

Vous traiterez au choix :

- *l'exercice + la partie I du problème*
- *le problème au moins jusqu'à la question 17*

▸ Exercice : un peu de bornes supérieures

Les deux questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Justifier que les parties de $\mathbf{R}$ suivantes possèdent une borne supérieure et une borne inférieure, et les déterminer :

$$A = \left\{ r \in \mathbf{Q} \mid \exists p, q \in \mathbf{Z}, p \neq q \text{ et } r = \frac{1}{p-q} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{(-1)^k k}{k+1}, \ k \in \mathbf{N} \right\}.$$

2. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbf{R}$. On note alors $X = \{|a - a'|, \ (a, a') \in A^2\}$.
   a. Justifier que X possède une borne supérieure.
   b. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $a_0, a_0' \in A$ tels que $|a_0 - a_0'| > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$.
   c. Prouver alors que $\sup(X) = \sup(A) - \inf(A)$.

▸ Problème : autour de la notion d'équipotence

On rappelle que deux ensembles E et F sont dits équipotents s'il existe une bijection de E dans F (ou, ce qui est équivalence, une bijection de F dans E).

1. **Premiers exemples** : à l'aide de la fonction th montrer que $\mathbf{R}$ et $]0, 1[$ sont équipotents.
   En déduire que pour tous réels $a < b$, $]a, b[$ et $\mathbf{R}$ sont équipotents.

Partie I. Quelques ensembles équipotents (ou non) à N

2. Prouver que pour tout entier naturel non nul n, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.
3. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (p, q) & \longmapsto & 2^p(2q+1) - 1 \end{array} \right.$.
   a. Prouver que f est surjective.
   b. Montrer que f est une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}$.
   On en déduit donc que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$ sont équipotents.
4. On souhaite prouver par récurrence sur $p \in \mathbf{N}^*$ qu'il existe une bijection de $\mathbf{N}^p$ sur $\mathbf{N}$.
   Le cas $p = 1$ est trivial, et le cas $p = 2$ vient d'être traité à la question précédente.
   On suppose donc que pour $p \in \mathbf{N}^*$, il existe une bijection $\varphi_p : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}$, et on définit une application $\varphi_{p+1} : \mathbf{N}^{p+1} \to \mathbf{N}$ en posant :

$$\forall (n_1, \ldots, n_p, n_{p+1}) \in \mathbf{N}^{p+1}, \ \varphi_{p+1}(n_1, \ldots, n_p, n_{p+1}) = f\left(\varphi_p(n_1, \ldots, n_p), n_{p+1}\right)$$

   où f est l'application $\mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de la question précédente. Prouver que φ_{p+1} est bijective.
5. **L'argument diagonal de Cantor**
   On souhaite prouver que $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbf{N}$.
   Supposons par l'absurde qu'il existe $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \\ n & \longmapsto & \varphi^{(n)} \end{array} \right.$ surjective.
   On notera que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi^{(n)}$ est une suite (c'est-à-dire une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$)
   Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on notera $\varphi_p^{(n)}$ le $p^{\text{ème}}$ terme de la suite $\varphi^{(n)}$, c'est-à-dire l'image de p par $\varphi^{(n)}$.
   On définit alors une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de la manière suivante : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = \varphi_n^{(n)} + 1$.
   Prouver que (v_n) n'admet pas d'antécédent par φ et en déduire le résultat annoncé.

Partie II. Le lemme fondamental de Dedekind

Soit E un ensemble, soit $f : E \to E$ une application **injective**, et soit M une partie de E telle que $f(E) \subset M$.
Le but de cette partie est de prouver que nécessairement, E et M sont équipotents *(c'est le lemme de Dedekind).*

6. Prouver que pour toutes parties C, D de E, $f(D \setminus C) = f(D) \setminus f(C)$.
7. Montrer que E et M sont stables par f.
8. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(M) \subset f^n(E)$ et $f^{n+1}(E) \subset f^n(M)$.
9. En déduire que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} f^n(E) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} f^n(M)$.
   Dans la suite, on note $K = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} f^n(E)$.
10. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $B_k = \begin{cases} f^p(E) & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \\ f^p(M) & \text{si } k = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases}$.
    Montrer que la suite $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $K \subset B_k$.
11. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $A_k = B_k \setminus B_{k+1}$.
    Soit $x \in E$.
    a. Montrer que si $x \in K$, alors x n'appartient à aucun des A_k, $k \in \mathbf{N}$.
    b. Montrer que si $x \notin K$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $x \in A_k$.
    c. En déduire que $E = K \cup \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k$, et que ces ensembles sont deux à deux disjoints.
12. Prouver que $M = K \cup \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} A_k$.
13. En utilisant la question 6 montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_k = f_{|A_k}$ réalise une bijection de A_k sur A_{k+2}.
14. Soient φ et ψ les applications définies par

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \notin \displaystyle\bigcup_{\ell\in\mathbf{N}} A_{2\ell} \\ f_k(x) & \text{si } x \in A_{2k} \end{cases} \end{array} \right. , \psi : \left| \begin{array}{ccl} M & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \notin \displaystyle\bigcup_{\ell\in\mathbf{N}} A_{2\ell} \\ f_k^{-1}(x) & \text{si } x \in A_{2k+2} \end{cases} \end{array} \right.$$

    Notons que φ et ψ sont bien définies puisque les A_{2k} sont deux à deux disjoints, et donc un élément x ne peut être dans deux A_{2k} distincts à la fois.
    Prouver que φ et ψ sont bijectives, et que $\varphi^{-1} = \psi$.
    En déduire que E et M sont équipotents.
15. **Application** : montrer que $\mathbf{R}$ est équipotent à $[-1, 1]$, puis que tout intervalle de $\mathbf{R}$ non vide, et non réduit à un singleton est équipotent à $\mathbf{R}$.

Partie III. Le théorème de Cantor-Bernstein et ses conséquences.

16. Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe $i : E \to F$ et $j : F \to E$ **injectives.**
    En notant que $j \circ i$ est injective, prouver, à l'aide du lemme de Dedekind, que E et F sont équipotents. *Ce résultat est appelé le théorème de Cantor-Bernstein.*
17. Prouver que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$ sont équipotents.

La suite du problème est assez longue et difficile à rédiger. Son but principal est de faire réfléchir ceux d'entre vous qui se posent des questions sur la «taille» des différents ensembles infinis.
Si vous l'abordez, essayez surtout de comprendre les grandes lignes des raisonnements, quitte à ne pas tout rédiger parfaitement.

Dans la suite, on admet que tout réel $x \in [0,1[$ possède un unique **développement décimal propre**, c'est-à-dire s'écrit de manière unique $x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ ce que l'on note $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ où $(a_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite (dépendant bien entendu de x) à valeurs dans $[\![0,9]\!]$, qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.
Ce résultat n'est pas particulièrement difficile et sera prouvé en cours en fin d'année.
Notons qu'il s'agit bien là de l'écriture décimale dont vous avez l'habitude : $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = 0,a_1a_2a_3a_4\dots$.
Si on demande à ce que les a_k ne soient pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang, c'est afin de garantir l'unicité d'un tel développement, car

$$0,0999999\cdots = \sum_{k=2}^{+\infty} 9\times 10^{-k} = \lim_{n\to+\infty} 9\sum_{k=2}^{n} 10^{-k} = \lim_{n\to+\infty} 9\times 10^{-2}\times \frac{1-10^{2-n}}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-1} = 0,100000\dots$$

18. **Argument diagonal de Cantor (bis)** : on prouve dans cette question qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. Par la question précédente, cela revient à prouver qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $]0,1[$. À cet effet, on suppose par l'absurde qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0,1[$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\left(a_k^{(n)}\right)_{k\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbf{N}^*}$ l'unique suite telle que le développement décimal propre de $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(n)} 10^{-k} = 0,a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\dots$$

On note alors x le nombre de $]0,1[$ défini par $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(k)} 10^{-k} = 0,a_1^{(1)}a_2^{(2)}a_3^{(3)}\dots$.
Vous pourrez admettre ou prouver que la forme ci-dessus est bien un développement décimal propre, c'est-à-dire que les $a_k^{(k)}$ ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.
Pour tout $k \geqslant 1$, notons $b_k \in [\![0,9]\!]$ le chiffre de $[\![0,9]\!]$ défini par $b_k = a_k^{(k)} + 1$ si $a_k^{(k)} \leqslant 8$ et $b_k = 0$ sinon.
Soit alors $y = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k} = 0,b_1b_2b_3\dots$. Prouver que y n'admet pas d'antécédent par φ. Conclure.

19. **$\mathbf{R}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.**
    a. En utilisant les fonctions indicatrices, donner une bijection de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$.
    b. Soit $u = (u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\{0,1\}$. Montrer que la suite $(\psi_n(u))_n$ définie par $\psi_n(u) = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{3^{k+2}}$ est convergente. On note $\psi(u)$ sa limite.
    c. Montrer que $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow &]0,1[\\ u & \longmapsto & \psi(u) \end{array} \right.$ est injective.
    d. Montrer que la fonction qui à un réel $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ de $]0,1[$ associe l'ensemble $\left\{2^i 3^{a_i},\ i \in \mathbf{N}^*\right\}$ est une injection de $]0,1[$ dans $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.
    e. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sont équipotents. Retrouver que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{N}$ ne sont pas équipotents.

20. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ sont équipotents. On pourra à cet effet utiliser l'application définie sur $]0,1[^2$, qui à deux réels $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ et $y = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ associe $\sum_{k=1}^{+\infty} (10a_k + b_k)\,10^{-2k} = 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots$

Partie IV. Nombres algébriques, nombres transcendants

Un réel x est dit **algébrique** s'il existe un polynôme non nul $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ **à coefficients dans Z** dont x est racine. Par exemple, tout rationnel $r = \frac{a}{b}$ est algébrique car r est racine de $bX - a$.
Mais certains nombres irrationnels sont également algébriques, par exemple $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2$.
Un nombre qui n'est pas algébrique est appelé **transcendant**.

21. Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il existe une injection de E dans $\mathbf{N}$. Par exemple, un ensemble fini $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est au plus dénombrable puisqu'à chaque élément $x \in E$, on peut associer l'unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x = x_i$.
On peut montrer, mais ce n'est pas utile dans la suite, que les ensembles au plus dénombrables sont les ensembles finis ou équipotents à $\mathbf{N}$.

   a. Montrer que si E_1 et E_2 sont deux ensembles au plus dénombrables, alors $E_1 \cup E_2$ est encore au plus dénombrable.
   En déduire qu'une union finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

   b. Soit E un ensemble, et soit $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties de E telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, E_n soit au plus dénombrable.
   Prouver que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ est au plus dénombrable.

22. Soit $k \in \mathbf{N}$. Prouver que l'ensemble des polynômes de degré k à coefficients entiers est équipotent à $\mathbf{N}$.

23. Prouver que l'ensemble des nombres algébriques est équipotent à $\mathbf{N}$.

24. En déduire qu'il existe des nombres transcendants, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas au plus dénombrable.

Correction du Devoir maison 10

▸ Exercice : un peu de bornes supérieures

1. Soit $r \in A$, et soient $p, q \in \mathbf{Z}$ tels que $r = \dfrac{1}{p-q}$.
Alors $|p-q| \geqslant 1$ si bien que $|r| \leqslant 1$.
Et donc $-1 \leqslant r \leqslant 1$. Autrement dit, 1 est un majorant de A, et -1 est un minorant de A.
Puisque A est non vide, cela nous garantit déjà l'existence de $\sup a$ et $\inf A$.

Par ailleurs, $1 = \dfrac{1}{1-0} \in A$ et $-1 = \dfrac{1}{0-1} \in A$, si bien que -1 et 1 sont respectivement le plus grand et le plus petit élément de A. Et donc $\inf A = -1$ et $\sup A = 1$.

> **Sup/max**
> Rappelons qu'un plus grand élément, s'il existe, est toujours la borne supérieure. En revanche, une borne sup n'est pas toujours un max, ce n'est le cas que si elle est dans A.

De même, pour $k \in \mathbf{N}$, $\left|(-1)^k \dfrac{k}{k+1}\right| = \left|\dfrac{k}{k+1}\right| < 1$, si bien que -1 est un minorant de B et 1 est un majorant de B.
En revanche, l'inégalité stricte nous dit que cette fois, -1 et 1 ne sont pas dans B.
Prouvons que 1 est tout de même le plus petit des majorants de B.

1ère **méthode : caractérisation «epsilonesque».**
Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon > 1$, alors $1 - \varepsilon < 0$, avec $0 \in B$.
Considérons donc le cas où $\varepsilon \in]0, 1]$.
Notons que pour $k \in \mathbf{N}$, $\dfrac{k}{k+1} = 1 - \dfrac{1}{k+1}$.
Et donc $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+1} < \varepsilon \Leftrightarrow k+1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Ainsi, fixons k un entier pair tel que $k > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Alors $1 - \varepsilon < \dfrac{k}{k+1} = \underbrace{\dfrac{(-1)^k}{k+1}}_{\in B}$.

Nous avons donc bien prouvé que $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in B, 1 - \varepsilon < b$.
Puisque de plus 1 est un majorant de B, alors $\sup B = 1$.

2ème **méthode : caractérisation séquentielle.**
Puisque 1 est un majorant de B, montrons qu'il existe une suite d'éléments de B qui converge vers 1.
Or la suite $\left(\dfrac{2k}{2k+1}\right)_k$, est justement une suite d'éléments de B, de limite 1.
Et donc par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $1 = \sup B$.

Le même type d'argument prouve que $-1 = \inf B$.

2.a. Puisque A est bornée, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant M$.
Considérons un tel M. Alors pour tous $a, a' \in A$, $|a - a'| \leqslant |a| + |a'| \leqslant 2M$.
Et donc $2M$ est un majorant de X. Puisque par ailleurs $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$, et donc $0 = |a - a| \in X$.
Ainsi, X est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, qui possède donc une borne supérieure.

2.b. Notons que A étant bornée, elle possède à la fois une borne supérieure et une borne inférieure.
Si $\sup(A) - \inf(A) < \varepsilon$, alors $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < 0$, et donc tout couple $(a_0, a_0') \in A^2$ fait l'affaire puisqu'une valeur absolue est positive.
Supposons donc $\sup(A) - \inf(A) \geqslant \varepsilon$.
Il existe alors $a_0 \in A$ tel que $a_0 > \sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Et de même, il existe $a_0' \in A$ tel que $a_0' - \dfrac{\varepsilon}{2} < \inf(A)$.
En particulier, $a_0 > \sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2} \geqslant \inf(A) + \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2} \geqslant a_0' - \dfrac{\varepsilon}{2} + \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2}$, et donc $a_0 \geqslant a_0'$.
Et alors $|a_0 - a_0'| = a_0 - a_0' > \sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2} - \inf(A) - \dfrac{\varepsilon}{2} = \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$.

2.c. Soit $x \in X$ et soient $a, a' \in A$ tels que $x = |a - a'|$.
On a alors $\inf(A) \leqslant a \leqslant \sup(A)$ et de même $\inf(A) \leqslant a' \leqslant \sup(A)$, si bien que $\inf(A) -$

$\sup(A) \leqslant a - a' \leqslant \sup(A) - \inf(A)$. Et donc $x = |a - a'| \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.
Nous venons donc de prouver que $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de X.
Et par la question précédente, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.
Par la caractérisation «epsilonesque» de la borne supérieure, $\sup(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

► Problème : Autour de la notion d'équipotence

1. La fonction th réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1,1[$.
Donc $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{th}(x) + 1\right)$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$, qui sont donc équipotents.

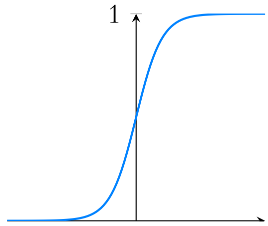

FIGURE 0.1– La fonction f.

Et alors, pour $a < b$, $x \mapsto (b-a)x + a$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]a,b[$, et donc $x \mapsto (b-a)f(x) + a$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]a,b[$.

Partie I. Quelques ensemble équipotents (ou non) à N

2. Le résultat est assez évident si l'on connaît un peu d'arithmétique : il suffit de prendre $2q+1$ égal au produit de tous les facteurs premiers impairs de n.
Mais reprouvons-le simplement à l'aide d'une récurrence forte.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\exists (p,q) \in \mathbf{N}^2, n = 2^p(2q+1)$.
Il est clair que $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$k, et supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie pour $k \in [\![1,n]\!]$.
Alors soit $n+1$ est pair, auquel cas il existe $r \in \mathbf{N}^*$ tel que $n+1 = 2r$, et donc $r < n+1$, si bien que $r \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc p, q tels que $r = 2^p(2q+1)$. Et donc $n+1 = 2r = 2^{p+1}(2q+1)$, si bien que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
Soit $n+1$ est impair, auquel cas il suffit de prendre $p = 0$ et $q = \frac{n}{2} \in \mathbf{N}$.
Donc par le principe de récurrence forte, tout entier naturel non nul est donc le produit d'une puissance de 2 par un entier impair.

3.a. C'est la question précédente : pour $n \in \mathbf{N}$, $n+1 \in \mathbf{N}^*$, si bien qu'il existe deux entiers $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $2^p(2q+1) = n+1 \Leftrightarrow n = 2^p(2q+1) - 1 \Leftrightarrow n = f(p,q)$.
Donc n possède un antécédent par f.

3.b. La surjectivité venant d'être prouvée, il s'agit donc de prouver que f est injective.
Soient $(p,q), (p',q')$ tels que $f(p,q) = f(p',q')$. On a donc $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$.
Quitte à échanger (p,q) et (p',q'), supposons $p \leqslant p'$. Alors $2q+1 = 2^{p'-p}(2q'+1)$.
Puisque $2q+1$ est impair, on a donc nécessairement $p' - p = 0 \Leftrightarrow p = p'$.
Et alors $2q+1 = 2q'+1$, si bien que $q = q'$.
Nous venons donc de prouver que $f(p,q) = f(p',q') \Rightarrow (p,q) = (p',q')$, et donc f est injective, et donc bijective.

Remarque
Si on n'avait pas pris soin de supposer $p \leqslant p'$, la relation ci-contre ne ferait pas apparaître que des entiers.

4. Notons $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^{p+1} & \longrightarrow & \mathbf{N} \times \mathbf{N} \\ (n_1, \dots, n_p, n_{p+1}) & \longmapsto & (\varphi_p(n_1, \dots, n_p), n_{p+1}) \end{array} \right.$, de sorte que $\varphi_{p+1} = \varphi_p \circ \psi$.
Puisque φ_p est bijective, si nous prouvons que ψ l'est également, alors f sera bijective.

Soit donc $(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Alors $(n_1, \dots, n_{p+1}) \in \mathbf{N}^{p+1}$ est un antécédent de (m,n) par ψ si et seulement si $\begin{cases} \varphi_p(n_1, \dots, n_p) = m \\ n_{p+1} = n \end{cases}$.
Or il existe un unique antécédent de m par φ_p, car φ_p est bijective, et si on note $(m_1, \dots, m_p)$ cet antécédent, alors $(m_1, \dots, m_p, n)$ est l'unique antécédent de (m,n) par ψ, qui est donc bijective.
Et ainsi, $\varphi_{p+1} = f \circ \psi$ réalise une bijection de $\mathbf{N}^{p+1}$ sur $\mathbf{N}$.
Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}^p$ et $\mathbf{N}$ sont équipotents.

5. L'argument diagonal de Cantor
Puisque φ est surjective, et que (v_n) est bien une suite à valeurs entières, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(p) = (v_n)$.
Mais alors en particulier, $v_p = \varphi_p^{(p)}$.
Or par définition, $v_p = \varphi_p^{(p)} + 1$, si bien qu'on arrive à $1 = 0$, ce qui est absurde.
Et donc on en déduit qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, et en particulier, que ces deux ensembles ne sont pas équipotents, puisqu'alors toute bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ serait surjective.

Partie II. Le lemme fondamental de Dedekind

6. Soient C, D deux parties de E, et soit $y \in f(D \setminus C)$. Alors il existe $x \in D \setminus C$ tel que $y = f(x)$.
Et puisque $x \in D$, $y = f(x) \in f(D)$.
Supposons par l'absurde que $y \in f(C)$. Alors il existe $x_1 \in C$ tel que $y = f(x_1)$. Et donc $f(x_1) = f(x)$, donc par injectivité de f, $x = x_1 \in C$, ce qui est absurde car $x \in D \setminus C$.
Donc $y \in f(D) \setminus f(C)$.

Inversement, soit $y \in f(D) \setminus f(C)$. Alors il existe $x \in D$ tel que $y = f(x)$.
Et x ne peut être dans C, faute de quoi on aurait $y = f(x) \in f(C)$. Donc $x \in D \setminus C$, et donc $y \in f(D \setminus C)$.
Ainsi, $f(D) \setminus f(C) \subset f(D \setminus C)$.
Donc par double inclusion, $\boxed{f(D \setminus C) = f(D) \setminus f(C).}$

7. Puisque f est définie sur E, à valeurs dans E, E est évidemment stable par f.
Et puisqu'on fait l'hypothèse que pour tout $x \in E$, $f(x) \in M$, alors nécessairement, $\forall x \in M$, $f(x) \in M$, et donc M est stable par f.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $y \in f^n(M)$. Alors il existe $x \in M$ tel que $y = f^n(x)$. Mais un tel x est dans E, et donc $y = f^n(x) \in f^n(E)$. On en déduit que $f^n(M) \subset f^n(E)$.
Et même, soit $y \in f^{n+1}(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x)$.
Puisque f est à valeurs dans M, alors $f(x) \in M$, et donc $y = f^n(f(x)) \in f^n(M)$. Et donc $f^{n+1}(E) \subset f^n(M)$.

> **Plus généralement**
> Pour $f : E \to F$ quelconque, si $A \subset B$ sont deux parties de E, alors $f(A) \subset f(B)$.
> Autrement dit, l'application qui à une partie de E associe son image directe par f est croissante pour l'inclusion.

9. Procédons par double inclusion. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(E)$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $x \in f^{n+1}(E)$, si bien que $x \in f^n(M)$.
Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(M)$. Et donc $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(E) \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(M)$.

L'inclusion réciproque découle immédiatement de $f^n(M) \subset f^n(E)$.
Et donc on a bien $\boxed{\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(E) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(M).}$

10. Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors si k est pair, soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $k = 2p$.
Alors par la question 8, $B_{k+1} = B_{2p+1} = f^p(M) \subset f^p(E) = B_k$.
Et si k est impair, $k = 2p + 1$, alors[1]

$$B_{k+1} = B_{2p+2} = f^{p+1}(E) \subset f^p(M) = B_k.$$

Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $B_{k+1} \subset B_k$, si bien que $\boxed{(B_k)_{k \in \mathbf{N}} \text{ est décroissante pour l'inclusion.}}$

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a $K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(E) \subset f^p(E)$, et donc en particulier, $K \subset B_{2p}$.
Et de même, $K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(M) \subset f^p(M)$, et donc $K \subset B_{2p+1}$.
Et donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N}, K \subset B_k.}$

11.a. Si $x \in K$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x \in B_k$ et $x \in B_{k+1}$, donc $x \notin B_k \setminus B_{k+1} = A_k$.

11.b. Si $x \notin K$, considérons $I = \{k \in \mathbf{N} \mid x \in B_k\}$. Il s'agit donc d'une partie non vide[2] de $\mathbf{N}$.
Si l'on suppose que $x \notin K$, alors il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $x \notin f^p(E) = B_{2p}$.
Et alors par décroissance de $(B_k)_k$, pour tout $k \geqslant 2p$, $x \notin B_k$.
Autrement dit, I est une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$, donc possède un plus grand élément, notons-le q.
Alors $x \in B_q$ et $x \notin B_{q+1}$, si bien que $x \in A_q$.
Comme mentionné ci-dessus, pour $k \geqslant q + 1$, $x \notin B_k$, et donc $x \notin A_k$.
Et pour $k < q$, alors $x \in B_q \subset B_{k+1} \subset B_k$, si bien que $x \notin A_k$.
Et donc $\boxed{\text{il existe un unique entier } k \text{ tel que } x \in A_k.}$

11.c. Nous venons de prouver dans les deux questions précédentes que tout élément de E est soit dans K, soit dans l'un des A_k, donc que $E = K \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$.
Par ailleurs, la question 11.a prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A_k \cap K = \emptyset$, et dans la question 11.b nous avons prouvé que les A_k sont deux à deux disjoints[3].

[1] Toujours d'après la question 8.

[2] Car $B_0 = f^0(E) = E$.

[3] Puisque tout x qui est dans l'union des A_k ne se trouve que dans un seul d'entre eux.

12. Notons que $A_0 = B_0 \setminus B_1 = E \setminus M$.
Et donc $A_0 \cap M = \emptyset$, alors que pour $k \geqslant 1$, $B_k \subset B_1 = M$. Et donc $A_k \subset M$, si bien que $M \cap A_k = A_k$.
Enfin, $K \subset M$, et donc $K \cap M = M$.
On en déduit donc que

$$M = E \cap M = (K \cap M) \cup \bigcap_{n\in\mathbf{N}} (A_k \cap M) = K \cup \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} A_k.$$

13. Soit $k \in \mathbf{N}$. Puisque f est injective, sa restriction à A_k l'est également, donc f_k est injective.
Il s'agit donc de prouver que f_k est bien à valeurs dans A_{k+2}, et que tout élément de A_{k+2} possède un antécédent par f_k.
Si k est pair, avec $k = 2n$, on a, d'après la question 6,

$$\begin{aligned} f(A_k) &= f(B_{2n} \setminus B_{2n+1}) = f(B_{2n}) \setminus f(B_{2n+1}) = f(f^n(E)) \setminus f(f^n(M)) \\ &= f^{n+1}(E) \setminus f^{n+1}(M) = B_{2n+2} \setminus B_{2n+3} = A_{2n+2} = A_{k+2}. \end{aligned}$$

Et de même, si $k = 2n+1$ est impair, alors

$$\begin{aligned} f(A_k) &= f(B_{2n+1} \setminus B_{2n+2}) = f(B_{2n+1}) \setminus f(B_{2n+2}) = f(f^n(M)) \setminus f(f^{n+1}(E)) \\ &= f^{n+1}(M) \setminus f^{n+2}(E) = B_{2n+3} \setminus B_{2n+4} = A_{2n+3} = A_{k+2}. \end{aligned}$$

Donc ceci prouve à la fois que f_k est bien à valeurs dans A_{k+2}, mais en plus que tout élément de A_{k+2} possède au moins un antécédent par f dans A_k (et donc un antécédent par f_k).
Ainsi, $\boxed{f_k : A_k \to A_{k+2} \text{ est surjective, et donc bijective.}}$

Remarque

Nous utilisons là le résultat suivant : $f(f^n(E)) = f^{n+1}(E)$.
Ceci n'a rien de difficile, et la preuve en est plutôt rapide, mais notons que ce n'est pas «vrai par définition» : le membre de gauche est l'image par f d'une partie de E, à savoir l'image directe de E par f^n. Et le membre de droite est l'image par l'application f^{n+1} de l'ensemble E.

14. Nous allons prouver que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$. Ceci garantira à la fois que ψ et φ sont bijectives, et que $\psi = \varphi^{-1}$.

Soit $x \in E$. Si $x \notin \bigcup_{\ell\in\mathbf{N}} A_{2\ell}$, alors $\varphi(x) = x$, et donc $\psi(\varphi(x)) = x$.
S'il existe un[4] $k \in \mathbf{N}$ tel que $x \in A_{2k}$. Alors $\varphi(x) = f_k(x) \in A_{2k+2}$.
Et donc $\psi(\varphi(x)) = f_k^{-1}(f_k(x)) = x$.
Donc pour tout $x \in E$, $\psi(\varphi(x)) = x$.

On prouve sur le même principe que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$.
On en déduit donc que φ réalise une bijection de E dans M, et donc que $\boxed{E \text{ et } M \text{ sont équipotents.}}$

[4] Nécessairement unique car les A_{2k} sont deux à deux disjoints.

15. **Application** : comme à la question 1, $\mathrm{th} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est injective[5] sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$.
Par le lemme de Dedekind, $\mathbf{R}$ et $[-1, 1]$ sont donc équipotents.
Plus généralement, si I est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, non réduit à un point, alors il contient au moins deux points distincts $a < b$.
Par définition d'un intervalle, on a donc $[a, b] \subset I$. Mais alors $x \mapsto (b-a)\,\mathrm{th}(x) + a$ est injective sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $]a, b[$ et donc dans I. Et alors par le lemme de Dedekind, $\mathbf{R}$ est équipotent à I.

[5] Car strictement croissante.

Partie III. Le théorème de Cantor-Bernstein et ses conséquences

16. Notons que $f = j \circ i$ est injective car composée d'injections.
On a alors $f(E) \subset j(F)$. Alors par le lemme de Dedekind, E et $j(F)$ sont équipotents.
Mais j réalise une bijection[6] de F sur $j(F)$, si bien que F et $j(F)$ sont équipotents.
Et donc $\boxed{E \text{ et } F \text{ sont équipotents.}}$

[6] Car j est injective.

17. Il existe évidemment une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}$, par exemple l'application $n \mapsto n$.

Construire une injection de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$ est un peu plus compliqué.
L'application qui à un rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible associe (p, q) est une injection f_1 de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$.
Mais $\mathbf{Z}$ étant équipotent à $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ est équipotent à $\mathbf{N}$: il existe $f_2 : \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ bijective.

Et alors si f est la fonction de la question 2, l'application $f \circ f_2 \circ f_1$ est une injection[7] de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$.
Et donc par le théorème de Cantor-Bernstein, **$\mathbf{Q}$ et $\mathbf{N}$ sont équipotents.**

[7] Car composée d'injections.

Alternative plus astucieuse (et un plus constructive) : on peut considérer l'application qui à $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel sous forme irréductible associe $2^p 3^q$ si $p \geqslant 0$ et $2^{-p}3^q 5$ si $p < 0$.
Un peu d'arithmétique prouve alors que cette application est injective de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$.

18. Argument diagonal de Cantor.
Procédons comme indiqué dans l'énoncé, en supposant qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0,1[$, et posons $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(k)} 10^{-k}$, où $a_k^{(k)}$ est le $k^{\text{ème}}$ chiffre du développement décimal de $\varphi(k)$.
Notons qu'il s'agit bien là du développement décimal propre de x, c'est-à-dire que les $a_k^{(k)}$ ne peuvent pas tous être égaux à 9 à partir d'un certain rang.
En effet, il existe une infinité de nombres de $]0,1[$ dont le développement décimal ne contient pas le chiffre 9, par exemple $0,1111\dots, 0,011111\dots, 0,011111\dots$ etc.
Et donc il existe une infinité de k pour lesquels $a_k^{(k)} \neq 9$.
Soit alors y le nombre dont le développement décimal est donné par l'énoncé, à savoir $y = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ où $b_k = \begin{cases} a_k^{(k)} + 1 & \text{si } a_k^{(k)} \neq 9 \\ 0 & \text{si } a_k^{(k)} = 9 \end{cases}$.
Notons qu'il s'agit encore d'un développement décimal propre puisque le raisonnement ci-dessus prouve également qu'il existe une infinité de $a_k^{(k)}$ qui ne sont pas égaux à 8.
Puisque $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0,1[$ est bijective, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\varphi(n) = y$.
Mais alors $a_n^{(n)}$ est le $n^{\text{ème}}$ chiffre du développement décimal de y. Or ce $n^{\text{ème}}$ chiffre est $b_n \neq a_n^{(n)}$.
On obtient donc une contradiction, et donc il n'existe pas de bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0,1[$.
Et donc $\boxed{\mathbf{R} \text{ et } \mathbf{N} \text{ ne sont pas équipotents.}}$

Remarque
La transformation appliquée aux $a_k^{(k)}$ n'est pas très importante, l'essentiel étant qu'aucun de b_k ne soit égal à $a_k^{(k)}$ afin que l'argument ci-dessous reste valable.

N ou N* ?
Nous avons ici utilisé $\mathbf{N}^*$ à la place de $\mathbf{N}$ puisque nous avions numéroté les développements décimaux à partir de 1 et non de 0, mais rappelons que $n \mapsto n+1$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^*$.

19. $\mathbf{R}$ est equipotent à $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.

19.a. C'est un résultat du cours, si on se rappelle qu'une suite à valeurs dans $\{0,1\}$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbf{N}$ dans $\{0,1\}$, la bijection en question est $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$.

19.b. La suite $(\psi_n(u))_n$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\psi_{n+1}(u) - \psi_n(u) = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_k}{3^{k+2}} - \frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{3^{k+2}} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+3}} \geqslant 0.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\psi_n(u) \leqslant \dfrac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^{k+2}} \leqslant \dfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{1}{3^k} \leqslant \dfrac{1}{3} \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\frac{2}{3}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{(\psi_n(u))_n \text{ est majorée, et étant croissante, elle est convergente.}}$

19.c. Soient (u_n), (v_n) deux éléments distincts de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, et soit $k_0 = \min\{k \in \mathbf{N},\ u_k \neq v_k\}$.
Quitte à échanger u et v, on peut supposer que $u_{k_0} = 0$ et $v_{k_0} = 1$.
Alors pour tout $n \geqslant k_0 + 1$, on a

$$\begin{aligned}
\psi_n(v) - \psi_n(u) &= \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{k_0} \frac{v_k}{3^{k+2}} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{v_k}{3^{k+2}} - \frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{k_0} \frac{u_k}{3^{k+2}} - \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{u_k}{3^{k+2}} \\
&= \frac{1}{3^{k_0+2}} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{v_k - u_k}{3^{k+2}} \\
&\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{3^{k+2}} \\
&\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \frac{1}{3^{k_0+3}} \sum_{i=0}^{n-k_0-1} \frac{1}{3^i}
\end{aligned}$$

Détails
Les premiers termes sont les mêmes, et pour $k = k_0$, seul reste le terme associé à v.

Dans le pire des cas, tous les $u_k, k > k_0$ valent 1 et les v_k sont nuls.

$$\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \frac{1}{3^{k_0+3}} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k_0}}{\frac{2}{3}}$$
$$\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^{k_0+2}} \geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}}.$$

Et donc en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\psi(v) - \psi(u) \geqslant \dfrac{1}{2\cdot 3^{k_0+2}} > 0$.

Et en particulier, $\boxed{\psi(v) \neq \psi(u), \text{ de sorte que } \psi \text{ est injective.}}$

19.d. Supposons qu'à deux réels $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ et $y = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ soient associés les mêmes ensembles A et B.
Alors, pour tout $i \geqslant 1$, chacun de ces ensembles contient un unique entier qui soit divisible par 2^i et pas par 2^{i+1}.
Pour A, c'est $2^i 3^{a_i}$, et pour B, c'est $2^i 3^{b_i}$.
Si A et B sont égaux, alors nécessairement, ces deux nombres sont égaux, et donc $a_i = b_i$.
Ceci étant vrai pour tout $i \geqslant 1$, il vient donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} = \sum_{k=1}^{n} b_k 10^{-k}$, ce qui après passage à la limite, nous donne $x = y$.
Et donc $\boxed{\text{la fonction de l'énoncé est injective.}}$

19.e. À l'aide des questions 11.a et 11.c, on construit une injection[8] de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ dans $]0,1[$.
D'autre part, la fonction de la question 11.d est injective, de $]0,1[$ dans $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.
Donc par le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sur $]0,1[$.
Ce qui, composé avec la bijection de la question 1 donne une bijection de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Et ainsi, comme annoncé, $\boxed{\mathscr{P}(\mathbf{N}) \text{ et } \mathbf{R} \text{ sont équipotents.}}$
Puisque par le théorème de Cantor[9], $\mathbf{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ ne sont pas équipotents, on retrouve le fait que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas équipotents.

[8] Car composée d'injections.

[9] Vu en cours et qui affirme que pour tout ensemble E, E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents.

20. Notons que si x et y sont deux réels de $]0,1[$, de développements décimaux respectifs $x = 0,a_1a_2\ldots$ et $y = 0,b_1b_2\ldots$, alors $0,a_1b_1a_2b_2\ldots$ est un développement décimal propre.
Et par unicité d'un tel développement, il est évident que l'application
$\varphi : (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty}(10a_k + b_k)10^{-2k}$ est une injection de $]0,1[^2 \to]0,1[$.
En revanche, $0,a_1b_1a_2b_2\ldots$ peut être un développement décimal propre sans que $0,a_1a_2\ldots$ le soit, penser par exemple à $0,91919191\ldots$.
Donc φ n'est probablement pas bijective.
En revanche, il existe évidemment une injection de $]0,1[$ dans $]0,1^2[$, par exemple $x \mapsto \left(x, \frac{1}{2}\right)$, et donc par Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $]0,1[^2$ dans $]0,1[$.
Mais à la question 1, nous avons prouvé qu'il existe une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}$.
Et alors cette bijection, couplée à ce qui a été fait au-dessus prouve que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ sont équipotents.

Partie IV. Nombres algébriques, nombres transcendants

21.a. Notons $F_1 = E_1$ et $F_2 = E_2 \setminus E_1$, de sorte que $E_1 \cup E_2 = F_1 \cup F_2$, avec F_1, F_2 disjoints.
Alors F_1 est au plus dénombrable puisque E_1 l'est, et F_2 est également au plus dénombrable, puisque si $\varphi : E_2 \to \mathbf{N}$ est injective, alors $\varphi_{|F_2} : F_2 \to \mathbf{N}$ est également injective[10].
De plus, pour tout $x \in E_1 \cup E_2$, on a $x \in F_1$ ou $x \in F_2$, les deux ne pouvant se produit simultanément.
Notons alors $\varphi_1 : F_1 \to \mathbf{N}$ et $\varphi_2 : F_2 \to \mathbf{N}$ deux injections, et soit $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ définie par

$$\forall x \in E_1 \cup E_2,\ \varphi(x) = \begin{cases} (0, \varphi_1(x)) & \text{si } x \in F_1 \\ (1, \varphi_2(x)) & \text{si } x \in F_2 \end{cases}.$$

Alors f est une injection de $E_1 \cup E_2$ dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, qui composée par une bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ nous fournit une injection de $E_1 \cup E_2$ dans $\mathbf{N}$, de sorte que $E_1 \cup E_2$ est au plus dénombrable.
Pour une union finie, il suffit ensuite de faire une récurrence sur le nombre d'ensembles.

[10] La restriction d'une injection est toujours une injection.

21.b. Adaptons le principe de la question précédente.
Soient $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des ensembles au plus dénombrables, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\varphi_n : E_n \to \mathbf{N}$ une injection.
Pour $x \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$, posons $\imath(x) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid x \in E_k\}$.

Et définissons alors une application $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n & \longrightarrow & \mathbf{N}\times\mathbf{N} \\ x & \longmapsto & (\imath(x), \varphi_{\imath(x)}(x)) \end{array}\right.$.

Alors il est aisé de constater que φ est injective, et donc composée avec une bijection de $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, nous fournit une injection de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ sur $\mathbf{N}$.

Ainsi, $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \text{ est au plus dénombrable.}}$

Remarque

$\imath(x)$ est bien défini car $\{k \in \mathbf{N} \mid x \in E_k\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$, qui admet donc un plus petit élément.

22. Choisir un polynôme de degré k à coefficients entiers, c'est choisir $k+1$ éléments de $\mathbf{Z}$.
Donc l'ensemble des polynômes de degré k à coefficients entiers est équipotent à $\mathbf{Z}^{k+1}$.
Mais $\mathbf{Z}$ étant équipotent à $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}^{k+1}$ est équipotent à $\mathbf{N}^{k+1}$, qui est lui-même équipotent à $\mathbf{N}$.

23. Soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. Notons $i \mapsto P_{i,k}$ une bijection entre $\mathbf{N}$ et l'ensemble des polynômes de degré k à coefficients entiers.
Pour $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, notons $\mathscr{C}(P)$ l'ensemble de ses racines réelles, qui est fini[11] et donc au plus dénombrable.

Alors l'ensemble des nombres algébriques est $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathscr{C}(P_{i,k})\right)$.
Mais par la question 20.b, à k fixé, $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathscr{C}(P_{i,k})$ est au plus dénombrable.

Et donc $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathscr{C}(P_{i,k})\right)$ est également au plus dénombrable.
Autrement dit, on a une injection de l'ensemble des algébriques dans $\mathbf{N}$.
Puisque $n \mapsto n$ est une injection de $\mathbf{N}$ dans l'ensemble des algébriques, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\text{l'ensemble des nombres algébriques est équipotent à } \mathbf{N}.}$

[11] Borné par le degré de P.

24. Puisque $\mathbf{R}$ n'est lui pas équipotent à $\mathbf{N}$, et qu'un réel est soit algébrique, soit transcendant, on n'a pas $\mathbf{R}$ égal à l'ensemble des algébriques, si bien qu'il existe des[12] nombres transcendants.

De plus l'ensemble des nombres transcendants ne saurait être au plus dénombrable, car alors $\mathbf{R}$ serait l'union de deux ensembles au plus dénombrables[13] et donc serait lui-même au plus dénombrable d'après la question 21.a.
Cela signifierait donc qu'il existe une injection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{N}$, et puisqu'il existe une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ seraient équipotents, ce qui n'est pas le cas d'après la question 18 (résultat reprouvé à la question 19).

[12] Au moins un pour l'instant.

[13] Les algébriques et les transcendants.

Commentaires *: si ce résultat garantit l'existence de nombres transcendants, on notera bien qu'il n'en construit pas explicitement. Une telle construction est difficile, et c'est* LIOUVILLE *qui fournit le premier exemple de nombre transcendant en 1844, en considérant*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110001000000000000000000100\ldots$$

Depuis, on connaît des preuves de transcendance d'autres nombres, et notamment de e *(*HERMITE*, 1873) et* π *(*LINDEMANN*, 1882).*
À l'heure actuelle, il existe encore beaucoup de nombres dont on ne sait pas dire s'ils sont algébriques ou transcendants, c'est notamment le cas de $\mathrm{e}+\pi$, $\mathrm{e}\pi$, e^{e}, π^{e}.