DEVOIR MAISON 10 (À RENDRE LE 19.12.24)

▸ Problème : développement en série de Engel

On note E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs entières, croissantes, et telles que $a_0 \geqslant 2$.

Le but de l'exercice est de prouver que tout réel $x \in]0,1]$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n}$, où $(a_n)_n$ est une suite de E.
Une telle écriture est appelée développement de x en série de Engel.

L'existence d'un tel développement est prouvé dans la partie I, l'unicité est prouvée dans la partie III.
La partie IV donne une caractérisation des rationnels à l'aide de leur développement en série de Engel.

Les parties IV et V sont facultatives.

Partie I. Existence du développement en série de Engel

1. Soit $(a_n) \in E$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k}$.

   Montrer que la suite $(S_n)_n$ est convergente, et que $0 < \frac{1}{a_0} < \lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant \frac{1}{a_0 - 1} \leqslant 1$.

Dans toute la suite, si $(a_n)_n \in E$, on note $f((a_n)_n)$ la limite de la suite (S_n) précédemment définie.
Ceci définit donc une application $f : E \to]0,1]$.

2. Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $p \geqslant 2$. On note alors $(a_n)_n$ la suite constante égale à p. Calculer $f((a_n)_n)$.
3. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x - 1 \end{array} \right.$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $0 < \varphi(x) \leqslant x$.
4. Soit $x \in]0,1]$. On souhaite prouver que $x \in \operatorname{Im} f$.
   Pour cela on définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en posant $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.
   a. Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante.
   b. Dans la suite, pour $n \in \mathbf{N}$, on note $a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k}$.

      Par définition de x_{n+1}, on a donc $\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} = x_n \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + x_n - 1 = x_n a_n - 1$.
      Montrer que $(a_n)_n \in E$.
   c. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 a_1 \cdots a_n}$.
   d. En déduire que $x = f((a_n)_n)$.
   e. Prouver que f est surjective.

Partie II. Deux exemples

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $f_n : x \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) - f_n(0) = -\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt$.
   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f_n(x) - 1| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$.
      On pourra distinguer le cas $x \geqslant 0$ du cas $x < 0$.
   c. Prouver alors que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{ch}(x)$.
6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = n + 2$. Calculer $f((a_n)_n)$.
7. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $b_n = (n+2)(2n+3)$. Montrer que $f((b_n)_n) = \operatorname{ch}\sqrt{2} - 2$.

Partie III. Unicité du développement de Engel

8. Soient $(a_n)_n, (a'_n)_n$ deux éléments de E, avec $a_0 < a'_0$.
En utilisant la question 1, montrer que $f((a_n)_n) > f((a'_n)_n)$.

9. Soient $(b_n)_n, (b'_n)_n$ deux éléments de E tels que $f((b_n)_n) = f(b'_n)_n)$. On souhaite prouver que $(b_n)_n = (b'_n)_n$.
Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $(b_n)_n \neq (b'_n)_n$, et on note $p = \min\{k \in \mathbf{N} \mid b_k \neq b'_k\}$.

   a. Justifier que p est bien défini.

   b. On définit deux suites $(a_n)_n$ et $(a'_n)_n$ en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_{n+p}$ et $a'_n = b'_{n+p}$.
   Montrer que $f((b_n)_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} f((a_n)_n)$.

   c. Aboutir à une contradiction, et en déduire que f réalise une bijection de E sur $]0, 1]$.

Partie IV. Caractérisation des nombres rationnels à l'aide des séries de Engel

10. Soit $(a_n)_n \in E$ une suite stationnaire. Montrer que $f((a_n)_n)$ est rationnel.

11. Soit $x \in \mathbf{Q} \cap]0, 1]$, et soient $p, q \in \mathbf{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.
Soit alors $(a_n)_n \in E$ l'unique antécédent de x par f, qui est donc la suite qui a été définie dans la partie I.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $qx_n \in \mathbf{N}$.

   b. En déduire que $(a_n)_n$ est stationnaire.

12. En utilisant les résultats des questions 6 et 7, montrer que e et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.

Partie V. $]0, 1]$ n'est pas dénombrable

13. Montrer que E est en bijection avec $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

14. En déduire que $]0, 1]$ et $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ sont équipotents.

15. On suppose par l'absurde qu'il existe une surjection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, et on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \varphi(n)_n + 1$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ n'a pas d'antécédent par φ. Aboutir à une contradiction.

16. Montrer que $]0, 1]$ n'est pas en bijection avec $\mathbf{N}$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 10

Partie I. Existence du développement en série de Engel
Notons une bonne fois pour toutes que les suites de E étant croissantes avec un premier terme positif, elles sont à valeurs dans $\mathbf{N}$ (et même dans $\mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$).

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} = \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n+1}} \geqslant 0.$$

Donc (S_n) est croissante.
Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a_k \geqslant a_0 \geqslant 2$, si bien que $\dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} \leqslant \dfrac{1}{a_0^k}$. Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0^{k+1}} \leqslant \frac{1}{a_0} \frac{1 - \left(\frac{1}{a_0}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{a_0}} \leqslant \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_0}} \leqslant \frac{1}{a_0 - 1}$.
Et donc (S_n) est majorée, et par le théorème de la limite monotone, converge donc.

Par ailleurs, nous venons de prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n \leqslant \dfrac{1}{a_0 - 1}$, et donc par passage à la limite dans les inégalités, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n \leqslant \frac{1}{a_0 - 1}$.
Enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \geqslant \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0 a_1}$, si bien que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n \geqslant \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0 a_1} > \frac{1}{a_0} > 0$. En conclusion, on a bien

$$\boxed{0 < \frac{1}{a_0} < \lim_{n \to +\infty} S_n < \frac{1}{a_0 - 1} \leqslant 1.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^{k+1}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p} \frac{1 - \frac{1}{p^{n+1}}}{1 - \frac{1}{p}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p - 1}.$$

Donc $\boxed{f((a_n)_n) = \dfrac{1}{p - 1}.}$

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. On a alors $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.
Donc $1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$, si bien que $0 < \varphi(x) \leqslant 1 + x - 1 = x$.

> **Rappel**
> Par définition de la partie entière, on a toujours
> $$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
> ce qui équivaut à
> $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

4.a. Puisque pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant x$, on a donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n) \leqslant x_n$.
Et donc $\boxed{(x_n)_n \text{ est décroissante.}}$

4.b. Il est clair que (a_n) est à valeurs entières[1].
Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque $0 < x_{n+1} \leqslant x_n$, alors $\frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{x_{n+1}}$, et donc par croissance de la partie entière, $\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{1}{x_{n+1}} \right\rfloor$. Donc $a_n \leqslant a_{n+1}$, si bien que la suite $(a_n)_n$ est croissante.
Enfin, on a $a_0 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$. Puisque $0 < x \leqslant 1$, $\frac{1}{x} \geqslant 1$, et donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1$, et donc $a_0 \geqslant 2$.
Ainsi, on a bien $\boxed{(a_n)_n \in E.}$

[1] Puisqu'une partie entière est un entier.

4.c. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $x = S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}$.
Pour $n = 0$, on a $x_1 = x_0 a_0 - 1 = x a_0 - 1$, et donc $x = \frac{1}{a_0} + \frac{x_1}{a_0} = S_0 + \frac{x_1}{a_0}$.
Donc la récurrence est bien initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $x = S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 a_1 \cdots a_n}$. Alors

$$S_{n+1} + \frac{x_{n+2}}{a_0 a_1 \cdots a_{n+1}} = S_{n+1} + \frac{x_{n+1} a_{n+1} - 1}{a_0 a_1 \cdots a_{n+1}} = S_{n+1} - \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 a_1 \cdots a_n} = x.$$

Et donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ x = S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 a_1 \cdots a_n}.}$

4.d. Par décroissance de $(x_n)_n$, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leqslant x_0 = x$.
Et donc $0 \leqslant \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} \leqslant \frac{x}{a_0 a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{x}{a_0^{n+1}}$.
Puisque $\dfrac{1}{a_0} \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$, $\dfrac{1}{a_0^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{a_0 a_1 \cdots a_n} = 0$.
On en déduit donc, par somme de limites, que

$$x = \lim_{n \to +\infty} S_n + \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = f((a_n)_n) + 0 = f((a_n)_n).$$

4.e. Nous venons donc de prouver que tout réel $x \in]0,1]$ possède au moins un antécédent par f, et donc $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

Partie II. Deux exemples

5.a. Par produit de fonctions dérivables[2], f_n est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f_n'(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{k x^{k-1}}{k!} = e^{-x} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

[2] Une exponentielle et une fonction polynomiale.

Ainsi, $-f_n$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-x}$, si bien que

$$\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt = [-f_n(t)]_0^x = f_n(0) - f_n(x)$$

ce qui après multiplication par -1 nous donne bien l'égalité demandée.

5.b. Puisque $f_n(0) = 1$, on a donc pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$$|f_n(x) - f_n(1)| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right|.$$

▸ Si $x \geqslant 0$, alors l'inégalité triangulaire pour les intégrales s'applique, et donc

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \right| \leqslant \int_0^x \left| \frac{t^n}{n!} e^{-t} \right| dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!}\, dt.$$

Cette dernière intégrale est facile à calculer : elle vaut $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Remarque
L'inégalité triangulaire est en fait superflue puisque l'intégrale calculée est positive (par positivité de l'intégrale), et donc on peut se débarrasser de la valeur absolue.

▸ Dans le cas où $x < 0$, alors les bornes n'étant plus dans le bon sens, on ne peut pas appliquer directement l'inégalité triangulaire. Mais procédons alors au changement de variable $u = -t$:

$$\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt = -\int_0^{-x} \frac{(-u)^n}{n!} e^u\, du$$

si bien que

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \right| = \left| \int_0^{-x} \frac{(-u)^n}{n!} e^u\, du \right|.$$

Cette fois, les bornes sont «dans le bon sens», donc on peut utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^{-x} \frac{(-u)^n}{n!} e^u\, du \right| \leqslant \int_0^{-x} \frac{|(-u)^n|}{n!} e^u\, du \leqslant \int_0^{-x} \frac{u^n}{n!} e^u\, du.$$

Mais pour tout $u \in [0, -x]$, $e^u \leqslant e^{-x} = e^{|x|}$ et donc

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \right| \leqslant \int_0^{-x} \frac{u^n}{n!} e^{|x|}\, du \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

5.c. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a donc, par un résultat de croissances comparées énoncé en cours, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit, par le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x) - 1| = 0$, et donc que

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1.$

Après multiplication par e^x, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.}$

Par conséquent, on a aussi $\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$ et $\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$.

Et donc $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$.

Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \left(1 + (-1)^k\right) \frac{x^k}{k!} = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{x^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Détails

$1 + (-1)^k$ vaut 2 si k est pair et 0 sinon.

On en déduit donc que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{ch}(x).}$

6. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a donc $a_0 a_1 \cdots a_k = 2 \times 3 \times \cdots \times (k+2) = (k+2)!$.
Et donc en reprenant les notations de la question 1, on a donc pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)!} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 - 2.$$

Et donc $f((a_n)_n) = e - 2$.

7. Commençons par noter que

$$\mathrm{ch}\,\sqrt{2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2}^{2k}}{(2k)!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(2k)!}.$$

Par ailleurs, en notant que $b_n = \frac{(2n+4)(2n+3)}{2}$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$b_0 b_1 \cdots b_k = \frac{3\times 4}{2} \frac{5 \times 6}{2} \cdots \frac{(2k+3)(2k+4)}{2} = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(2k+4)!}{2} = \frac{(2k+4)!}{2^{k+2}}.$$

Donc en notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k}$, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+2}}{(2k+4)!} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{2^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{n+2} \frac{2^k}{(2k)!} - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{2!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2.$$

Et donc $f((b_n)) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \boxed{\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2.}$

Partie III. Unicité du développement de Engel

8. Par la question 1, on a

$$f((a_n)_n) > \frac{1}{a_0} \geqslant \frac{1}{a'_0 - 1} \geqslant f((a'_n)_n).$$

9.a. Puisque les deux suites (b_n) et (b'_n) sont distinctes, il existe au moins un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $b_k \neq b'_k$, et donc $\{k \in \mathbf{N} \mid b_k \neq b'_k\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$. Elle possède donc[3] un plus petit élément p.

[3] Comme toute partie non vide de $\mathbf{N}$.

9.b. Soit $n \geqslant p$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{b_0 \cdots b_k}$$

Chasles.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{b_0 \cdots b_{p-1}} \frac{1}{b_p \cdots b_k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{b_p b_{p+1} \cdots b_k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{k-p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} f((a_n)_n).
\end{aligned}$$

Remarque
On notera que la suite (a_n) est bien encore dans E.

Puisque par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f((b_n)_n)$, on a bien, par unicité de la limite,

$$\boxed{f((b_n)_n) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} f((a_n)_n).}$$

9.c. Le même raisonnement prouve que

$$f((b'_n)_n) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b'_0 b_1 \cdots b'_k} + \frac{1}{b'_0 b'_1 \cdots b'_{p-1}} f((a'_n)_n) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_k} + \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{p-1}} f((a'_n)_n).$$

Détails
On rappelle que par définition de p, $b_k = b'_k$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Et donc on a $f((a_n)_n) = f((a'_n)_n)$.
Mais $a_0 = b_p \neq b'_p = a'_0$, si bien que par la question 8, $f((a_n)_n) \neq f((a'_n)_n)$, d'où une contradiction.

Ainsi, si $f((b_n)) = f((b'_n))$, alors $(b_n) = (b'_n)$, et donc la fonction f est injective.
Puisque nous avions déjà prouvé sa surjectivité, $\boxed{\text{il s'agit bien d'une bijection de } E \text{ sur } [0,1[.}$

Partie IV. Caractérisation des nombres rationnels.

10. Soit donc (a_n) stationnaire, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = a_{n_0}$.
Alors pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_k} &= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n_0}} \frac{1}{a_{n_0} \cdots a_{n_0}} = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n_0}} \frac{1}{a_{n_0}^{n-n_0}} \\
&= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n_0}} \sum_{k=0}^{n-n_0} \frac{1}{a_{n_0}^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n_0}} \frac{1 - \left(\frac{1}{a_{n_0}}\right)^{n-n_0+1}}{1 - \frac{1}{a_{n_0}}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n_0}} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_0}} \in \mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

11.a. Montrons, avec les notations de la question 3, que si $qx \in \mathbf{N}$, alors $q\varphi(x) \in \mathbf{N}$.
Soit donc $x \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $qx \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire tel que $x = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbf{N}$. Alors

$$q\varphi(x) = q\frac{p}{q}\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + q\frac{p}{q} - q = p\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + p - q \in \mathbf{Z}.$$

Et puisqu'on sait déjà $\varphi(x) > 0$, $q\varphi(x) \in \mathbf{N}$.

Souvenons nous alors que $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Puisque $qx_0 \in \mathbf{N}$, une récurrence facile en utilisant l'observation faite ci-dessus prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $qx_n \in \mathbf{N}$.

11.b. Nous avions déjà prouvé la décroissance de (x_n), et donc (qx_n) est également décroissante. Il s'agit donc d'une suite décroissante d'entiers naturels. Une telle suite est nécessairement stationnaire[4], donc (qx_n) est stationnaire.

[4] Voir le cours : c'est l'exemple qui suit la définition de suite stationnaire.

Et donc (x_n) l'est également, et puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$, alors (a_n) est stationnaire.

12. Nous venons donc de prouver qu'un réel $x \in [0,1[$ est rationnel si et seulement si l'unique antécédent (a_n) de x par f est stationnaire.
À la question 6, nous avons prouvé que l'unique antécédent de $e-2$ par f est la suite $(n+2)$, qui n'est pas stationnaire. Donc $e-2$ est irrationnel, et donc il en est de même de e.

Rappel
La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

Par ailleurs, si $e^{\sqrt{2}}$ était entier, il en serait de même de $\operatorname{ch}\sqrt{2} = \dfrac{e^{\sqrt{2}} + \frac{1}{e^{\sqrt{2}}}}{2}$.
Mais la question 7 prouve que $\operatorname{ch}(\sqrt{2}) - 2$ est irrationnel[5] et donc il en est de même de $\operatorname{ch}\sqrt{2}$, et donc de $e^{\sqrt{2}}$.

[5] Car son développement en série de Engel n'est pas stationnaire.

Partie V. $]0,1]$ **n'est pas dénombrable.**

13. Soit g l'application qui à une suite $(a_n) \in E$ associe la suite (b_n) définie par $b_0 = a_0 - 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = a_{n+1} - a_n$.
Il est clair[6] que (b_n) est à valeurs dans $\mathbf{N}$.

[6] Par croissance de (a_n).

Et si inversement, on note h l'application qui à une suite (b_n) de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ associe la suite (a_n) définie par $a_0 = b_0 + 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = a_n + b_{n+1}$, alors $(a_n) \in E$, et il est facile de vérifier que $h \circ g = \mathrm{id}_E$ et $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbf{N}^{\mathbf{N}}}$, si bien que g et h sont bijections réciproques l'une de l'autre.
Et donc E et $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ sont équipotents.

14. Puisque f est une bijection entre E et $]0,1]$, en la composant avec une bijection entre $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ et E, on obtient une bijection entre $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ et $]0,1]$.

15. Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $(u_n) = \varphi(p)$. Alors en particulier, $u_p = \varphi(p)_p + 1 = u_p + 1$, ce qui est absurde.

Notations
$\varphi(p)$ est une suite, et $\varphi(p)_p$ désigne donc son $p^{\text{ème}}$ terme.

16. En particulier, il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.
Or s'il existait une bijection entre $]0,1]$ et $\mathbf{N}$, par la question 14, il existerait également une bijection entre $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{N}$, ce que nous venons de prouver être absurde.
Donc $]0,1]$ et $\mathbf{N}$ ne sont pas équipotents.