DEVOIR MAISON 1

▶ *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent. Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.*
La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements *sont des éléments d'évaluation de votre copie.*
▶ *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple : 6.c. et pas seulement c.) et d'encadrer vos résultats.*
▶ *Si vous avez* ***sérieusement*** *cherché une question sans parvenir à la résoudre, vous pouvez demander des indications par mail : `vienney@mp2i-champo.fr`, ou plus simplement venir me voir avant ou après un cours.*

▶ Problème : différentes preuves d'inégalités classiques.

Notations

▶ Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(a)}$ la racine $n^{\text{ème}}$ de a.
Vous pourrez utiliser sans démonstration (ou le reprouver si vous en ressentez le besoin) que pour a, b strictement positifs, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ et que pour $x > 0$, $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.
▶ Dans l'énoncé, nous utiliserons toujours des notations avec des pointillés comme $x_1 + \cdots + x_n$ ou $x_1 \cdots x_n$, mais si vous êtes à l'aise avec les notations $\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\prod_{i=1}^{n} x_i$, vous n'hésiterez pas à les utiliser dans votre copie.

1. En utilisant une identité remarquable, justifier que pour tous réels x et y, $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
   En déduire que pour tous $a, b \in \mathbf{R}_+$, $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

Partie I. Inégalité arithmético-géométrique : une preuve par convexité

Dans toute cette partie, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et des réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$.
On note alors $M = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ la moyenne arithmétique des a_i.

2. Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction convexe dérivable.
   a. Prouver que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f(a_i) \geqslant f'(M)(a_i - M) + f(M)$.
   b. En déduire *l'inégalité de Jensen* : $f(M) \leqslant \dfrac{1}{n}(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n))$.
3. a. Justifier que la fonction $-\ln$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
   b. En déduire alors que $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ *(inégalité arithmético-géométrique)*.
4. **Une application** : soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs tels que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Montrer que $x_1 + \cdots + x_n \geqslant n$.

Partie II. Inégalité arithmético-géométrique : une preuve par récurrence

On cherche dans cette partie à retrouver par d'autres méthodes les résultats de la partie I, il est donc interdit d'utiliser cette première partie ici.

5. Le but de cette question est de prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ la propriété suivante, notée $\mathscr{P}(n)$:

   $\mathscr{P}(n)$: «quels que soient les n réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ si $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ alors $x_1 + \cdots + x_n \geqslant n$».

   Puisqu'il est évident que $\mathscr{P}(1)$ est vraie, nous allons nous concentrer sur l'hérédité. Nous supposons donc que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels positifs tels que $x_1 \cdots x_{n+1} = 1$.

   a. Justifier que l'un (au moins) des x_i est inférieur ou égal à 1, et que l'un (au moins) des x_i est supérieur ou égal à 1.
   Dans la suite, quitte à renuméroter les x_i, on supposera que $x_n \geqslant 1$ et $x_{n+1} \leqslant 1$.
   b. Montrer que $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geqslant n$.
   c. En notant que $(1 - x_n)(1 - x_{n+1}) \leqslant 0$, prouver que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geqslant n + 1$, et donc que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

6. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs, et soit $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ (appelé moyenne géométrique des a_i).
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_i = \dfrac{a_i}{G}$.
   Calculer $x_1 x_2 \cdots x_n$, et à l'aide de la question 5, en déduire l'*inégalité arithmético-géométrique* :
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Partie III. L'inégalité de Young

Soient p, q deux nombres strictement positifs, avec p rationnel, vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Le but de cette partie est de prouver le résultat suivant (appelée *inégalité de Young*) : quels que soient les réels strictement positifs a et b,
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
Dans toute la suite, on considère deux réels a et b strictement positifs et fixés.

7. Justifier que pour $p = 2$, l'inégalité de Young est vraie.
8. Montrer que p et q sont strictement supérieurs à 1 et que q est rationnel.
9. Justifier qu'il existe deux entiers naturels m et n tels que $p = \frac{m+n}{m}$ et $q = \frac{m+n}{n}$.
10. Soient x et y les réels définis par $x = a^p$ et $y = b^q$.
    Prouver que $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} = \dfrac{mx + ny}{m + n}$.
11. À l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique, terminer la preuve de l'inégalité de Young.

Partie IV (facultative). La preuve de Cauchy de l'inégalité arithmético-géométrique par récurrence «montante-descendante»

Dans cette partie, on donne encore une autre preuve de l'inégalité arithmético-géométrique, inspirée de la première preuve connue, publiée par Cauchy en 1821.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on notera $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante : « quels que soient les réels positifs $a_1, \ldots, a_n$, on a $a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$ ».

12. Justifier que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
13. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On souhaite prouver que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie.
    Considérons donc $a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels positifs, et posons $A = \dfrac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$.
    a. Montrer que $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} A \leqslant A^n$.
    b. En déduire que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie.
14. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ $2n$ réels positifs.
    En notant que $a_1 a_2 \cdots a_{2n} = (a_1 a_2 \cdots a_n)(a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2n})$, montrer que
$$a_1 a_2 \cdots a_{2n} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$
    En déduire que $\mathscr{P}(2n)$ est vraie.
15. Prouver alors **soigneusement** que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et en déduire de nouveau l'inégalité arithmético-géométrique.

Correction du Devoir maison 1

▸ Problème : différentes preuves d'inégalités classiques.

1. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors $(x-y)^2 \geqslant 0$, si bien que $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$. Et donc $\boxed{xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.}$

En particulier, si a, b sont deux réels positifs, alors

$$\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Détails L'inégalité précédente était valable quels que soient les réels x et y, et donc vaut aussi pour $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$.

Partie I. Inégalité arithmético-géométrique : une preuve par convexité.

2.a. Puisque f est convexe, alors sa courbe représentative est située au dessus de ses tangentes.
Et ceci vaut notamment pour la tangente à la courbe de f au point d'abscisse M.
Or cette tangente a pour équation $y = f'(M)(x-M) + f(M)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(M)(x-M) + f(M) \leqslant f(x)$.
En particulier, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{f'(M)(a_i - M) + f(M) \leqslant f(a_i).}$

2.b. Sommons terme à terme les n inégalités précédemment obtenues. Alors

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geqslant f'(M)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nM\right) + nf(M).$$

Mais $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nM$, si bien que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nM = 0$.
Ne reste donc que $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geqslant nf(M)$. En divisant les deux membres par le réel positif n, il vient

$$\boxed{\frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n} \geqslant f(M).}$$

Positivité Si l'on mentionne la positivité de n, c'est afin de montrer qu'on s'est bien préoccupé de vérifier que la multiplication par n préservait le sens de l'inégalité.

3.a. La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x}$ et $f''(x) = \frac{1}{x^2} \geqslant 0$.
Et donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Rappel Une fonction deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive.

3.b. D'après la question 2.b, on a donc $-\ln(M) \leqslant \frac{1}{n}\left(-\ln(a_1) - \cdots - \ln(a_n)\right)$.
Soit encore $\ln(M) \geqslant \frac{1}{n}\left(\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)\right)$.
Mais $\ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)$.
Et donc en appliquant l'exponentielle aux deux membres[1] de l'inégalité ci-dessus, il vient

$$M = e^{\ln(M)} \geqslant e^{\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ainsi, on a bien prouvé l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

[1] La croissance de l'exponentielle nous garantit que le sens des inégalités est préservé lors du passage à l'exponentielle.

4. **Une application** : soient donc $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs dont le produit vaut 1. Alors nécessairement, aucun des x_i n'est nul[2], si bien que tous sont strictement positifs.
Par l'inégalité arithmético-géométrique, on a alors

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Mais $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, si bien que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 1$, et donc $1 \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
On en déduit que $\boxed{n \leqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n.}$

[2] Sinon leur produit serait nul.

Partie II. Inégalité arithmético-géométrique : une preuve par récurrence

5.a. Si tous les x_i étaient strictement supérieurs à 1, alors par produit, $x_1 x_2 \cdots x_n > 1$, ce qui est absurde.
Donc l'un au moins des x_i est inférieur ou égal à 1.
Et sur le même principe, tous ne peuvent pas être inférieurs strictement à 1, donc l'un au moins est supérieur ou égal à 1.

5.b. On a $x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_nx_{n+1}) = 1$.
Donc en appliquant $\mathscr{P}(n)$ aux n réels $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_nx_{n+1}$, il vient

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_nx_{n+1} \geqslant n.$$

5.c. Notons que $1 - x_n \leqslant 0$ et $1 - x_{n+1} \geqslant 0$, donc comme annoncé, $(1-x_n)(1-x_{n+1}) \leqslant 0$.
On en déduit que $1 - x_n - x_{n+1} + x_nx_{n+1} \leqslant 0$, et donc en particulier, $x_n + x_{n+1} \geqslant x_nx_{n+1} + 1$.
Ainsi,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_nx_{n+1} + 1 \geqslant n+1.$$

6. On a $x_1x_2\cdots x_n = \dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{G^n} = \dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{a_1a_2\cdots a_n} = 1$.
Donc par la question 5, $\dfrac{a_1}{G} + \dfrac{a_2}{G} + \cdots + \dfrac{a_n}{G} \geqslant n$.
Soit encore $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant G$, qui est bien l'inégalité demandée.

Partie III. L'inégalité de Young

7. Pour $p = 2$, on a $q = 2$. Et donc l'inégalité de Young devient $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, inégalité dont on a déjà prouvé à la question 1 qu'elle était valable.

8. Puisque $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont strictement positifs et que leur somme vaut 1, les deux sont strictement inférieurs à 1.
Et donc puisque $0 < \frac{1}{p} < 1$, alors $p > 1$, et de même $q > 1$.

> **Détails**
> Si par exemple on avait $\frac{1}{p} \geqslant 1$, alors puisque $\frac{1}{q} > 0$, il viendrait
> $$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$$
> ce qui est absurde.

Puisque p est rationnel et positif, il existe deux entiers naturels r et s tels que $p = \dfrac{r}{s}$.
Et alors si r et s sont de tels entiers,

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{s}{r} = \frac{r-s}{r}$$

si bien que $q = \dfrac{r}{r-s}$ est rationnel.

> **Remarque**
> On a bien $r - s \neq 0$ puisque $p \neq 1$, et donc $r \neq s$.

9. Reprenons les notations précédentes, et posons $m = s$ et $n = r - s$, de sorte que $m + n = r$.
Alors on a bien $p = \frac{r}{s} = \frac{m+n}{m}$ et $q = \frac{r}{r-s} = \frac{m+n}{n}$.
Signalons que n est bien un entier naturel[3] puisque $p > 1$ et donc $r > s$.

[3] C'est-à-dire positif.

10. Il suffit de faire le calcul :

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = x\frac{m}{m+n} + y\frac{n}{m+n} = \frac{mx+ny}{m+n}.$$

> **Intuition**
> Dans l'expression $\frac{mx+ny}{m+n}$, on reconnaît une moyenne «coefficientée», ce qui justifie ce choix des a_i.

11. Posons $a_1 = x, a_2 = x, \dots, a_m = x$ et $a_{m+1} = y, a_{m+2} = y, \dots, a_{m+n} = y$.
Alors en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux $m+n$ réels positifs $a_1, \dots, a_{m+n}$, il vient

$$\sqrt[m+n]{x\cdots xy\cdots y} \leqslant \frac{x + \cdots + x + y + \cdots + y}{m+n} = \frac{mx+ny}{m+n}.$$

Mais $\sqrt[m+n]{x\cdots xy\cdots y} = \sqrt[m+n]{x^my^n} = \sqrt[m+n]{a^{mp}b^{nq}} = \sqrt[m+n]{a^{m+n}b^{m+n}} = ab$.

Et donc on a bien prouvé que $\boxed{ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}.}$

Partie IV. La preuve de Cauchy de l'inégalité arithmético-géométrique.

12. Soient a_1, a_2 deux réels positifs. Alors par la question 1, $\sqrt{a_1a_2} \leqslant \dfrac{a_1+a_2}{2}$.
En élevant au carré les deux membres de cette inégalité[4], il vient donc $a_1a_2 \leqslant \left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^2$.
Et donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

[4] Ce qui préserve l'inégalité puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

13.a. Puisque $\mathscr{P}(n)$ est vraie, en l'appliquant aux n réels positifs $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A$, il vient

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}A \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + A}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n \leqslant A^n.$$

13.b. Si $A = 0$, puisque tous les a_i sont positifs, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$.
Et donc évidemment $a_1 \cdots a_{n-1} \leqslant \left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$.
Et si $A \neq 0$, alors $A > 0$, si bien qu'en divisant les deux membres de l'inégalité précédente par A, il vient

$$a_1 \cdots a_{n-1} \leqslant A^{n-1}$$

et donc $a_1 \cdots a_{n-1} \leqslant \left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$.
Dans tous les cas, on a bien prouvé $\mathscr{P}(n-1)$.

14. Puisque $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on a à la fois

$$a_1 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \text{ et } a_{n+1} \cdots a_{2n} \leqslant \left(\frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$

Et donc $a_1 a_2 \cdots a_{2n} = (a_1 a_2 \cdots a_n)(a_{n+1} \cdots a_{2n}) \leqslant \left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \left(\dfrac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right)^n$.
Mais puisque $\mathscr{P}(2)$ est vraie, en l'appliquant aux deux réels $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ et $\dfrac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}$, il vient

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n} \leqslant \left(\frac{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}\right)^2.$$

Et donc

$$a_1 a_2 \cdots a_{2n} \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right)^n \leqslant \left(\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}\right)^2\right)^n \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$

Et donc $\mathscr{P}(2n)$ est vraie.

15. Nous venons donc de prouver que $\mathscr{P}(2)$ est vraie, et que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(2n)$.
Nous allons commencer par utiliser ce dernier point pour prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(2^n)$ est vraie.
Pour $n = 1$, on a supposé $\mathscr{P}(2^1)$ vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(2^n)$ soit vraie. Alors $\mathscr{P}(2 \times 2^n)$ est vraie par la question 11, et donc $\mathscr{P}(2^{n+1})$ est vraie.
Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(2^n)$ est vraie.

Pour la suite, l'idée est que si $\mathscr{P}(2^n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(2^n - 1)$ est vraie (par la question 10), puis $\mathscr{P}(2^n - 2)$ est vraie, etc. Reste à l'écrire précisément.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $2^n > n$ (ce qui pourrait se prouver aisément par récurrence sur n).
Prouvons alors par récurrence sur $k \in [\![0, 2^n - n]\!]$ que $\mathscr{P}(2^n - k)$ est vraie.
Nous venons de prouver que pour $k = 0$, $\mathscr{P}(2^n)$ est vraie.
Soit $k \in [\![0, 2^n - n - 1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(2^n - k)$ soit vraie. Puisque $2^n - k \geqslant 2^n - (2^n - n - 1) \geqslant n + 1 \geqslant 2$, alors par la question 10, $\mathscr{P}(2^n - k - 1)$ est vraie, donc $\mathscr{P}(2^n - (k+1))$ est vraie.
Par le principe de récurrence, pour tout $k \in [\![0, 2^n - n]\!]$, $\mathscr{P}(2^n - k)$ est vraie.
Et donc en particulier, pour $k = 2^n - n$, il vient $\mathscr{P}(n)$ vraie.

> **Récurrence finie.**
> Notons ici que notre récurrence est finie, et ne prouve pas un résultat pour «tous les entiers assez grands». Ceci tient au fait que notre hérédité n'est pas valable pour tout k, mais que jusqu'à un certain rang (ici si on autorisait k à être aussi grand qu'on le souhaitait, on en arrivait à écrire des choses comme $\mathscr{P}(0)$,voire même $\mathscr{P}(-1)$, ce qui n'a aucun sens.)

Et donc nous venons bien de prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Enfin, $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels positifs, il vient $a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$, si bien qu'en passant à la racine $n^{\text{ème}}$, $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

> **Remarque**
> La fonction racine $n^{\text{ème}}$ est croissante, comme le prouverait par exemple une rapide étude de dérivée. Donc ici elle préserve le sens de nos inégalités.