DEVOIR MAISON 1

► *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent. Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.*
La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements *sont des éléments d'évaluation de votre copie.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple : 6.c. et pas seulement c.) et d'encadrer vos résultats.*
► *Si vous avez* ***sérieusement*** *cherché une question sans parvenir à la résoudre, vous pouvez demander des indications par mail :* `vienney@mp2i-champo.fr`*, ou plus simplement venir me voir avant ou après un cours.*

► Exercice : étude d'une suite d'intégrales

On rappelle que pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, et que par convention, $0! = 1$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$.

1. Calculer I_0, puis à l'aide d'une intégration par parties, déterminer I_1.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$.
   En déduire que la suite (I_n) possède une limite que l'on précisera.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$.
4. On définit une suite (u_n) en posant $u_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{e} + (-1)^n I_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

► Problème : deux inégalités classiques

Le but de ce problème est de prouver deux inégalités classiques, que nous rencontrerons de nouveau plus tard dans l'année.

Notations

► Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(a)}$ la racine $n^{\text{ème}}$ de a.
Vous pourrez utiliser sans démonstration (ou le reprouver si vous en ressentez le besoin) que pour a, b strictement positifs, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ et que pour $x > 0$, $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.
► Dans l'énoncé, nous utiliserons toujours des notations avec des pointillés comme $x_1 + \cdots + x_n$ ou $x_1 \cdots x_n$, mais si vous êtes à l'aise avec les notations $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i$, vous n'hésiterez pas à les utiliser dans votre copie.

Partie I. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.

Le but de cette partie est de prouver l'inégalité $(\blacklozenge)$: $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i^2}$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*).

Soit encore : $|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$.

On définit une fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 = (a_1t + b_1)^2 + (a_2t + b_2)^2 + \cdots + (a_nt + b_n)^2$.

1. On suppose dans cette question que les réels $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous nuls.

a. Prouver que f est une fonction polynomiale de degré 2, c'est-à-dire qu'il existe trois réels A, B, C, que l'on déterminera, avec $A \neq 0$, tels que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = At^2 + Bt + C$.

b. Prouver que f est de signe constant sur $\mathbf{R}$. Qu'en déduit-on quant au signe de son discriminant ?

c. En déduire l'inégalité ($\blacklozenge$).

2. Prouver que ($\blacklozenge$) reste valable même si les a_i sont tous nuls.

Partie II. L'inégalité arithmético-géométrique

Dans cette partie, on considère un entier naturel non nul n et des réels positifs $a_1, \dots, a_n$.
On note $A = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ (*la moyenne arithmétique des* a_i) et $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ (*la moyenne géométrique des* a_i).
On appelle **inégalité arithmético-géométrique** l'inégalité $G \leqslant A$, soit encore $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, que l'on va chercher à prouver dans cette partie.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant e^{x-1}$. *Indication : on pourra par exemple étudier la fonction* $x \mapsto e^{x-1} - x$.

4. En utilisant les réels $\dfrac{a_1}{A}, \dots, \dfrac{a_n}{A}$, prouver l'inégalité arithmético-géométrique.

5. À quelle condition l'inégalité arithmético-géométrique est-elle une égalité ?

Partie III. Deux applications

Cette partie, plus difficile que le reste du devoir, est facultative.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

   a. Montrer que $1 + \frac{H_n}{n} = \dfrac{2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n}}{n}$.

   b. En déduire que $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < H_n$.

   c. Prouver sur le même principe que si $n \geqslant 3$, alors $H_n < n - \dfrac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

7. Soient a, b, c trois réels positifs tels que $\dfrac{1}{2+a} + \dfrac{1}{2+b} + \dfrac{1}{2+c} = 1$.

   a. Montrer que $1 = \dfrac{a}{2+a} + \dfrac{b}{2+b} + \dfrac{c}{2+c}$.

   b. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\dfrac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2}{a+b+c+6} \leqslant \dfrac{a}{2+a} + \dfrac{b}{2+b} + \dfrac{c}{2+c}$.

   c. En déduire que $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leqslant 3$.