Devoir surveillé 7 (sujet plus difficile)

▶ Exercice : algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E.

1. Soient $\lambda \neq \mu$ deux réels.
   a. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.
   b. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \leqslant \dim E$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose qu'il existe deux réels distincts $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que $(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et on se fixe deux tels réels λ_1 et λ_2.

2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E)$.
3. Prouver que si α est un réel différent de λ_1 et λ_2, alors la somme $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E)$ est directe.
   En déduire que $\operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.
4. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
   - il existe deux réels distincts $\mu_1 < \mu_2$ tels que $(g - \mu_1 \mathrm{id}_E) \circ (g - \mu_2 \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$
   - il existe p **impair** tel que $f^p = g^p$.

   a. Prouver que pour $i \in \{1, 2\}$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f^p - \lambda_i^p \mathrm{id}_E)$.
   b. Montrer que les inclusions de la question précédente sont en fait des égalités.
   c. Prouver que si f est une homothétie, alors $f = g$.
   d. On suppose à présent que f n'est pas une homothétie.
   Montrer alors que $\lambda_1 = \mu_1$ et que $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker}(g - \mu_1 \mathrm{id}_E)$.
   En déduire que $f = g$.

▶ Problème : nombres et polynômes de Bernoulli.

Ce problème, très long, présente diverses applications d'une famille assez mystérieuse de nombres rationnels, que l'on appelle la suite des nombres de Bernoulli.

Partie I. Un premier pas vers la formule de Faulhaber

Nous avons déjà rencontré les identités suivantes : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

Est-il alors vrai que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^p = P(n)$?

Et si c'est vrai, comment déterminer un tel polynôme ?

En réalité, nous allons plutôt nous intéresser à des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} k^p = P(n)$ (les calculs seront plus simples avec cette condition), mais on pourra garder à l'esprit que $\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n-1} k^p + n^p$.

1. Soit $p \in \mathbf{N}^*$.

   a. Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p = P(n)$.

   b. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p = P(n)$. Prouver qu'alors $P(X+1) - P(X) = X^p$.

   c. Inversement, prouver que si $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifie $P(X+1) - P(X) = X^p$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p = P(n) - P(0)$.

2. **L'endomorphisme Δ**

   On note dans toute la suite on note Δ l'application linéaire $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

   a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer le degré de $\Delta(X^n)$.
   En déduire, pour $P \in \mathbf{R}[X]$, le degré de $\Delta(P)$ en fonction de $\deg(P)$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X] \subset \operatorname{Im}(\Delta)$.

   c. Déterminer l'image et le noyau de Δ.

   Dans toute la suite on note $\mathcal{H} = \left\{ P \in \mathbf{R}[X] \;\middle|\; \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0 \right\}$.

   d. Justifier sans calculs que $\mathcal{H}$ et $\mathbf{R}_0[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$.

   e. Prouver que $\Delta_{|\mathcal{H}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathbf{R}[X]$.

Partie II. Polynômes et nombres de Bernoulli, formule de Faulhaber.

De la partie précédente, on déduit que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{H}$ contient un unique antécédent de X^p par Δ.
On notera P_p cet unique antécédent, de sorte que $\Delta(P_p) = X^p$.
En particulier, $P_0 = X - \frac{1}{2}$, puisque $\Delta\left(X - \frac{1}{2}\right) = X + 1 - \frac{1}{2} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = 1$, et que $\displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = 0$.

3. Justifier que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ et tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\Delta(P) = X^p \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R},\ P = P_p + \lambda$.

4. En vous inspirant éventuellement de ce qui a été fait pour Δ à la partie I, montrer que $D : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

5. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $P_p' = D(P_p) = pP_{p-1}$.
   En déduire que $D^{p+1}(P_p) = p!$, et donc que $P_p = p!(D^{-1})^{p+1}(1)$.

Dans la suite, on note $B_0 = 1$ et pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $B_p = pP_{p-1} = p!(D^{-1})^p(1)$.
On a alors en particulier $B_p' = D(B_p) = p!(D^{-1})^{p-1}(1) = pB_{p-1}$.

> On a donc $B_0 = 1$, et pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, B_p est l'unique polynôme vérifiant $B_p' = pB_{p-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,dt = 0$.
> Le polynôme B_p est appelé le $p^{\text{ème}}$ **polynôme de Bernoulli.**
> Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $b_p = B_p(0)$, appelé le $p^{\text{ème}}$ **nombre de Bernoulli.**

6. a. Calculer B_1, B_2, B_3. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3.

   b. Montrer que $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$.

   c. Justifier que pour tout $p \geqslant 2$, $B_p(1) = B_p(0)$.

   d. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $B_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k X^{p-k}$.

e. En déduire que $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est l'unique suite $(u_p)_p \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$ et pour tout $p \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} u_k = 0$. Déterminer alors la valeur de b_4.

7. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. En utilisant la question 1, justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\right)$.

En déduire alors que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = n^p + \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k} b_{p+1-k} n^k = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p+1}{k} b_{p+1-k} n^k.$$

Donner alors une formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

Partie III. Développement limité de tan

Cette partie et la suivante sont relativement indépendantes des précédentes, mais nécessitent d'avoir compris la définition des nombres de Bernoulli donnée dans la partie II. On pourra si besoin admettre les résultats de la question 6.

Dans cette partie, on note $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ et coth : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)} \end{array}\right.$.

8. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$ et justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, qu'on ne cherchera pas à calculer.

Dans la suite, on note $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.

b. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3, et en déduire les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

c. En notant que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_k = 0$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = b_n$.

9. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}\mathrm{coth}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. $(\star)$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = 0$.

10. À l'aide de $(\star)$, déterminer le développement limité de $\mathrm{coth}(x) - \frac{1}{x}$ au voisinage de 0, à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

11. Prouver que pour $x \neq 0$, $\mathrm{th}(x) = 2\mathrm{coth}(2x) - \mathrm{coth}(x)$, et en déduire que le développement limité de th au voisinage de 0 à l'ordre $2n$, est

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k\left(4^k - 1\right) b_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right).$$

12. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, tan et th admettent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, que l'on notera dans la suite

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n).$$

13. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, déterminer a_{2k} et c_{2k}.

14. **a.** Rappeler l'expression de $\tan'$ en fonction de tan et celle de th' en fonction de th.

b. En déduire les développements limités à l'ordre 7 de tan et de th, et constater que pour $k \in [\![0, 7]\!]$, $|a_k| = |c_k|$.

c. Pour $n \in \mathbf{N}$, justifier que le développement limité d'ordre $2n$ de $\tan^2$ est

$$\tan^2(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{2i+1} a_{2(k-i)+1} \right) x^{2k+2} + o\left(x^{2n}\right).$$

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_{2i+1} a_{2(n-1-i)+1}$.

e. Sur le même principe, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, c_{2n+1} en fonction de $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$.

f. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{2n+1} = (-1)^n c_{2n+1}$.

15. En déduire alors le développement limité de tan au voisinage de 0, à l'ordre $2n$.

Partie IV. Valeur de la fonction ζ de Riemann aux entiers pairs.

Cette partie est indépendante de la précédente, et on pourra admettre si besoin le résultat de la question 9, à savoir la nullité des b_{2p+1}.

16. **a.** Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

b. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)_{n \geqslant 1}$ converge.

c. Montrer alors que pour tout entier $p \geqslant 2$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \right)_{n \geqslant 1}$ converge.

On notera dans la suite $\zeta(p)$ cette limite : $\zeta(p) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

Le but de cette partie est de calculer, pour $p \geqslant 1$, la valeur de $\zeta(2p)$.

17. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in]0,1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi t)$, puis déterminer une constante $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall t \in]0,1[, \quad \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi t) + \lambda.$$

18. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t) \sin((2n+1)\pi t)\, dt = 0.$$

19. Pour $(p,k) \in \mathbf{N}^2$, on note $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^1 B_{2p}(t) \cos(2k\pi t)\, dt$.

a. À l'aide d'intégrations par parties, calculer $I_{1,k}$, pour $k \in \mathbf{N}$.

b. Pour tout $p \geqslant 2$ et tout $n \in \mathbf{N}$, donner une relation liant $I_{p,k}$ et $I_{p-1,k}$.

c. En déduire une expression de $I_{p,k}$ en fonction de p et k.

20. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On pose alors, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \text{ ou } t = 1 \\ \dfrac{B_{2p}(t) - B_{2p}(0)}{\sin(\pi t)} & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$

Montrer que φ_p est continue sur $[0,1]$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

Pour gagner du temps, on admettra que les raisonnements ci-dessus pourraient se généraliser afin de prouver que φ_p est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ tout entier.

21. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \varphi_p(t) \sin((2n+1)\pi t)\, dt$ en fonction de n, p et b_{2p}.

22. En déduire la valeur de $\zeta(2p)$ en fonction de b_{2p}. Donner notamment les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

23. Justifier que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\zeta(2p)\pi^{-2p} \in \mathbf{Q}$.

Correction du Devoir surveillé 7

▸ Exercice : algèbre linéaire

Commençons par une remarque qui va être fondamentale dans tout l'exercice : pour $x \in E$, on a

$$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow f(x) = \lambda x.$$

1.a. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$.
Alors on a $\lambda x = f(x) = \mu x$ si bien que $(\lambda - \mu)x = 0_E$. Puisque $\lambda \neq \mu$, alors $x = 0_E$.
Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) = \{0_E\}.}$

1.b. Nous venons de prouver que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$, qui sont deux sous-espaces vectoriels de E, sont en somme directe.
Et donc $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) = \dim(\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E))$.
Et puisque $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E, sa dimension est inférieure ou égale à celle de E, d'où l'inégalité annoncée.

2. La condition donnée dans l'énoncé nous donne directement l'inclusion
$\operatorname{Im}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)$, et donc $\operatorname{rg}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)$.
Par le théorème du rang appliqué à $f - \lambda_2 \mathrm{id}_E$, il vient donc

$$\dim E - \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E).$$

Mais l'inégalité contraire avait été établie à la question 1.b, si bien que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E).$$

Couplé au fait que $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe, on en déduit qu'il s'agit de deux sous-espaces supplémentaires dans E.

> **Astuce**
> $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

3. Revenons à la définition de somme directe
Soient donc $x_1 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E), x_2 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E)$ et $y \in \operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E)$ tels que $x_1 + x_2 + y = 0_E \quad (E_1)$.
Si on applique f aux deux membres, il vient $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \alpha y = 0_E \quad (E_2)$.
Multiplions les deux membres de (E_1) par α et soustrayons l'équation ainsi obtenue à (E_2).
Il vient alors

$$\underbrace{(\lambda_1 - \alpha)x_1}_{\in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)} + \underbrace{(\lambda_2 - \alpha)x_2}_{\in \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E)} = 0_E.$$

Puisque $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe, on en déduit que $(\lambda_1 - \alpha)x_1 = (\lambda_2 - \alpha)x_2 = 0_E$.
Et comme $\lambda_1 - \alpha \neq 0$ et $\lambda_2 - \alpha \neq 0$, $x_1 = x_2 = 0_E$. Dans (E_1), il ne reste plus que $y = 0_E$.
Ainsi, $\boxed{\text{la somme } \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E) \text{ est directe.}}$

> **Méthode**
> Il n'y a pas de méthode facile pour prouver que trois sev (ou plus) sont en somme directe. Si on connaît les dimensions de ces sous-espaces on peut essayer de voir si la somme de ces dimensions est égale à la dimension de la somme. Et faute de mieux, on revient à la définition de somme directe.

On en déduit, avec les mêmes arguments[1] qu'en 1.b que

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}) + \dim \operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E) \leqslant \dim E.$$

Et donc

$$\dim E + \dim \operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E) \leqslant \dim E$$

ce qui impose[2] $\dim \operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E) = 0$, si bien que $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E) = \{0_E\}.}$

[1] La dimension d'une somme directe est la somme des dimensions.

[2] Une dimension est positive.

4.a. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)$. Alors comme expliqué précédemment $f(x) = \lambda_1 x$, si bien que $f^2(x) = f(\lambda_1 x) = \lambda_1 f(x) = \lambda_1^2 x$.
Puis $f^3(x) = \lambda_1^2 f(x) = \lambda_1^3 x$, etc.
Une récurrence rapide prouverait que $f^p(x) = \lambda_1^p x$, et donc $x \in \operatorname{Ker}(f^p - \lambda_1^p \mathrm{id}_E)$.
Ainsi, on a bien prouvé l'inclusion annoncée : $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f^p - \lambda_1^p \mathrm{id}_E)$.

4.b. Il serait possible de s'en tirer avec des arguments de dimension, mais il y a plus rapide : soit $x \in \mathrm{Ker}(f^p - \lambda_1^p \,\mathrm{id}_E)$.
Alors il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \,\mathrm{id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Et alors $f^p(x) = f^p(x_1) + f^p(x_2) = \lambda_1^p x_1 + \lambda_2^p x_2$.
Or $f^p(x) = \lambda_1^p x = \lambda_1^p x_1 + \lambda_1^p x_2$.
Donc $(\lambda_2^p - \lambda_1^p)x_2 = 0_E$. Et puisque p est impair, $\lambda_1^p \neq \lambda_2^p$, si bien que $x_2 = 0_E$, et donc $x = x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i 1 \,\mathrm{id}_E)$.
Par double inclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f^p - \lambda_1^p \,\mathrm{id}_E).}$

4.c. Si $f = \alpha \,\mathrm{id}_E$ est l'homothétie de rapport α alors $f^p = \alpha^p \mathrm{id}_E$, et donc $\mathrm{Ker}(f^p - \alpha^p \,\mathrm{id}_E) = E$.
Mais les arguments appliqués à f ci-dessus valent aussi pour g.
Et si $\mathrm{Ker}(g - \mu_2 \,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$, alors $\mathrm{Ker}(g^p - \mu_2^p \,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$.
Et donc $\mathrm{Ker}(f^p - \mu_2^p \,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$.
Si on avait $\mu_2 \neq \alpha$, alors on aurait également[3] $\mu_2^p \neq \alpha^p$. Mais comme à la question 1.b, $\mathrm{Ker}(g^p - \mu_2^p \,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(g^p - \alpha^p \,\mathrm{id}_E) = E$ sont en somme directe, ce qui est absurde.
Donc $\mu_2 = \alpha$, et $\mathrm{Ker}(g - \mu_2 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(g^p - \alpha^p \,\mathrm{id}_E) = E$, si bien que $g = \alpha \,\mathrm{id}_E = f$.

[3] Encore une fois, c'est de l'injectivité de la fonction puissance p, liée à l'imparité de p

4.d. Notons que g vérifiant les mêmes hypothèses que f, on a $E = \mathrm{Ker}(g - \mu_1 \,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(g - \mu_2 \,\mathrm{id}_E)$, et puisque cette fois g n'est pas une homothétie[4], aucun de ces deux sous-espaces vectoriel n'est égal à E. Et puisqu'ils sont supplémentaires aucun n'est égal à $\{0_E\}$.
Et les mêmes remarques valent pour les $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)$.
De plus, pour $i \in \{1, 2\}$, $\mathrm{Ker}(g - \mu_i \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(g^p - \mu_i^p \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f^p - \mu_i^p \,\mathrm{id}_E)$.

[4] Sinon le même raisonnement qu'à la question précédente en inversant f et g prouverait que f est aussi une homothétie.

Si μ_1 était différent à la fois de λ_1 et de λ_2, on aurait donc λ_1^p, λ_2^p et μ_1^p deux à deux distincts. Mais pour les mêmes raisons[5] qu'à la question 3, en remplaçant f par f^p, puisque $\mathrm{Ker}(f^p - \lambda_1^p \,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^p - \lambda_2^p \,\mathrm{id}_E) = E$, nécessairement $\mathrm{Ker}(f^p - \mu_1^p \,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.
Et donc $\mathrm{Ker}(g - \mu_1 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(g^p - \mu_1^p \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f^p - \mu_1^p \,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ ce qui est absurde.
Donc $\mu_1 \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Et sur le même principe, $\mu_2 \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Et puisque $\mu_1 < \mu_2$ et $\lambda_1 < \lambda_2$, on a donc $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.

[5] De sommes directes.

Et donc

$$\mathrm{Ker}(g - \mu_1 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(g - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(g^p - \lambda_1^p \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f^p - \lambda_1^p \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E).$$

Et de même $\mathrm{Ker}(g - \mu_2 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \,\mathrm{id}_E)$.

La restriction de f à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E)$ est l'homothétie de rapport λ_1, et de même pour la restriction de g à $\mathrm{Ker}(g - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E)$.
Sur le même principe, les restrictions de f et g à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \,\mathrm{id}_E)$ sont égales à l'homothétie de rapport λ_2.
Et donc f et g coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires de E, et donc sont égales.

Détails
On a déjà dit que pour $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_E)$, $f(x) = \lambda_1 x$.

▸ Problème : nombres de Bernoulli

Partie I. Un premier pas vers la formule de Faulhaber

1.a. Soient P, Q deux polynômes tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^p = Q(n)$.
Alors en particulier le polynôme $P - Q$ s'annule en tous les éléments de $\mathbf{N}^*$, et donc est le polynôme nul, si bien que $P = Q$.
Donc il existe bien au plus un tel polynôme.

1.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a donc $P(n+1) - P(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p - \sum_{k=1}^{n-1} k^p = n^p$.
Et donc le polynôme $P(X+1) - P(X) - X^p$ s'annule une infinité de fois, et donc est le polynôme nul, si bien que $P(X+1) - P(X) = X^p$.

1.c. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \sum_{k=1}^{n-1} (P(k+1) - P(k)) = P(n) - P(0)$.

Somme télescopique.

2. **L'endomorphisme Δ**

2.a. Déjà on a $\Delta(X^0) = \Delta(1) = 0$ qui est de degré $-\infty$.
Et si $n \geqslant 1$, alors

$$\Delta(X^n) = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k.$$

Puisque $\binom{n}{n-1} = n \neq 0$, $\Delta(X^n)$ est donc de degré $n-1$.

Si $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme constant, alors $\Delta(P) = 0$ est de degré $-\infty$.
Et si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de degré $p > 0$, alors $\Delta(P) = \sum_{k=1}^{p} a_k \Delta(X^k)$ est une somme de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc de même degré que le terme de plus haut degré, qui est $a_p \Delta(X^p)$, de degré[6] $p-1$.

Et donc $\deg \Delta(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg P = 0 \\ \deg P - 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

[6] Car $a_p \neq 0$.

2.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors la famille $(\Delta(X), \Delta(X^2), \ldots, \Delta(X^{n+1}))$ est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts, tous de degré inférieur ou égal à n.
C'est donc une famille libre de $\mathbf{R}_n[X]$, de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, donc c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
Et puisque ce sont des polynômes de $\operatorname{Im} \Delta$, on en déduit que $\boxed{\mathbf{R}_n[X] \subset \operatorname{Im} \Delta.}$

2.c. D'après la question précédente, $\operatorname{Im} \Delta$ contient tous les $\mathbf{R}_n[X]$, et donc contient $\mathbf{R}[X]$ tout entier, si bien que $\boxed{\operatorname{Im} \Delta = \mathbf{R}[X].}$
Et puisque nous avons prouvé à la question 2.a que $\deg(\Delta(P)) = -\infty \Leftrightarrow \deg P = 0$, on a donc $\boxed{\operatorname{Ker} \Delta = \mathbf{R}_0[X].}$

2.d. Notons que $\mathscr{H}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\, dt$, et donc est un hyperplan de $\mathbf{R}[X]$.
De plus il est clair que le polynôme constant égal à 1 n'est pas dans $\mathscr{H}$, si bien que $\mathbf{R}[X] = \mathscr{H} \oplus \operatorname{Vect}(1) = \boxed{\mathscr{H} \oplus \mathbf{R}_0[X].}$

2.e. Nous savons déjà que Δ est surjective.
Donc si $Q \in \mathbf{R}[X]$, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q = \Delta(P)$.
Mais ce P s'écrit alors de manière unique $P = P_0 + \lambda$, avec $P_0 \in \mathscr{H}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
Et alors $Q = \Delta(P) = \Delta(P_0) + \Delta(\lambda) = \Delta(P_0)$, si bien que Q possède au moins un antécédent dans $\mathscr{H}$.

Enfin, $\Delta_{|\mathscr{H}}$ est injective puisque $\operatorname{Ker}(\Delta_{|\mathscr{H}}) = \operatorname{Ker}(\Delta) \cap \mathscr{H} = \mathbf{R}_0[X] \cap \mathscr{H} = \{0\}$.

Partie II. Polynôme et nombres de Bernoulli, formule de Faulhaber

3. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathbf{R}[X]$. On a alors $\Delta(P) = X^p \Leftrightarrow \Delta(P) = \Delta(P_p) \Leftrightarrow \Delta(P - P_p) = 0$.
C'est le cas si et seulement si $P - P_p \in \operatorname{Ker} \Delta = \mathbf{R}_0[X]$.
Donc si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $P - P_p = \lambda$.

4. Notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ qui à P associe P' (de sorte que $\Delta = f_{|\mathscr{H}}$).
Alors f partage certaines propriétés avec Δ, et notamment le fait que $\deg(f(P)) = \deg P' = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg P \leqslant 0 \\ \deg(P) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
Donc le même raisonnement qu'aux questions 2.b et 2.c prouve que $\operatorname{Im}(f) = \mathbf{R}[X]$ et $\operatorname{Ker} f = \mathbf{R}_0[X]$.
Et alors l'argument de la question 2.e prouve de même que $D = f_{|\mathscr{H}}$ est un isomorphisme.

Remarque

En même temps, il était déjà connu que tout polynôme était la dérivée d'un autre polynôme et qu'un polynôme est de dérivée nulle si et seulement si il est constant.

5. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Par définition de P_p, on a $P_p(X+1) - P_p(X) = X^p$.
En dérivant cette relation, on obtient $P_p'(X+1) - P_p'(X) = pX^{p-1}$, soit encore $\Delta(P_p') = pX^{p-1}$.

Donc $\Delta\left(\frac{P_p'}{p}\right) = X^{p-1}$, si bien que par la question 3, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{P_p'}{p} = P_{p-1} + \lambda$.

Autrement dit

Ce qui se cache là-derrière est le fait que Δ et la dérivation commutent :

$$\Delta(P)' = \Delta(P').$$

Mais $P_{p-1} \in \mathcal{H}$, si bien que $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_p'(t)}{p}\,dt = \underbrace{\int_0^1 P_{p-1}(t)\,dt}_{=0 \text{ car } P_{p-1}\in\mathcal{H}} + \int_0^1 \lambda\,dt = \lambda$.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 P_p'(t)\,dt = P_p(1) - P_p(0) = P_p(0+1) - P_p(0) = \Delta(P_p)(0) = 0^p = 0$.

Et donc $\lambda = 0$, si bien que $\dfrac{P_p'}{p} = P_{p-1}$ et ainsi $\boxed{P_p' = pP_{p-1}.}$

Une récurrence facile prouve alors que $D^p(P_p) = p!P_0$, et donc $D^{p+1}(P_p) = p!D(P_0) = p!$.

On en déduit que $D^p(P_p) = p!D^{-1}(1)$, puis $D^{p-1}(P_p) = p!(D^{-1})^2(1), \dots, P_p = p!(D^{-1})^{p+1}(1)$.

Subtilité

Puisque D n'a pas même espace de départ que d'arrivée, l'application D^p n'est pas définie.

En revanche, ce que prouve la question précédente, c'est que $D(P_p)$ est encore dans $\mathcal{H}$ puisque P_{p-1} l'est. Donc $\Delta(\Delta(P_p))$ est bien défini, et ainsi de suite.

Le problème n'est pas tout à fait le même pour Δ^{-1} dont l'espace d'arrivée ($\mathcal{H}$) est inclus dans l'espace de départ, et donc on peut bien composer Δ^{-1} par elle-même.

6.a. On a donc $B_1 = P_0 = X - \dfrac{1}{2}$.

Ensuite, B_2 est l'unique polynôme tel que $B_2' = 2B_1$ et $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,dt = 0$.

Puisque $B_2' = 2X - 1$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $B_2 = X^2 - X + \lambda$.

Et alors $0 = \displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \lambda\right)\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \lambda$, si bien que $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

Donc $\boxed{B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}.}$

Puis $B_3' = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \dfrac{1}{2}$, donc il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{X}{2} + \mu$, et

$$0 = \int_0^1 B_3(t)\,dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \mu$$

si bien que $\mu = 0$ si bien que $\boxed{B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{X}{2}.}$

On a donc $\boxed{b_0 = 1, b_1 = -\dfrac{1}{2}, b_2 = \dfrac{1}{6} \text{ et } b_3 = 0.}$

6.b. Nous savons déjà que $\deg B_0 = 0$, et pour $p \geqslant 1$, puisque $B_p' = pB_{p-1}$, $\deg B_p = \deg B_{p-1} + 1$.

On en déduit que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\deg B_p = p$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$, libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts. Étant de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Et donc tout polynôme de degré au plus n est combinaison linéaire de $(B_0, B_1, \dots, B_n)$.

Ceci étant valable pour tout n, $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est génératrice de $\mathbf{R}[X]$, et étant libre[7], c'est une base de $\mathbf{R}[X]$.

[7] Toujours car formée de polynômes de degrés deux à deux disintcts.

6.c. Soit $p \geqslant 2$. Alors $B_p(1) - B_p(0) = \displaystyle\int_0^1 B_p'(t)\,dt = \int_0^1 pB_{p-1}\,dt = 0$ puisque $B_{p-1} \in \mathcal{H}$.

Et donc $\boxed{B_p(1) = B_p(0).}$

6.d. Prouvons le résultat annoncé par récurrence sur p. Pour $p = 0$, on a $B_0 = 1 = \dbinom{0}{0} b_0 X^0$.

Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $B_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k X^{p-k}$.

Alors $B_{p+1}' = (p+1)B_p = (p+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k X^{p-k}$, si bien qu'il existe $\lambda_p \in \mathbf{R}$ tel que

$$B_{p+1} = (p+1)\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k \frac{X^{p-k+1}}{p-k+1} + \lambda_p.$$

Notons tout de suite que $b_{p+1} = B_{p+1}(0) = \lambda_p$. Et donc

$$\begin{aligned} B_{p+1} &= (p+1)\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{b_k}{p-k+1} X^{p-k+1} + b_{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{(p+1)!}{(p-k)!k!(p-k+1)} b_k X^{p+1-k} + b_{p+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k X^{p-k+1} + \binom{p+1}{p+1} b_{p+1} X^{p+1-(p+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} b_k X^{p+1-k}.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\boxed{B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k X^{p-k}.}$

6.e. Soit $p \geqslant 1$. Alors par la question 6.c $B_{p+1}(1) = B_{p+1}(0)$, soit encore

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} b_k = b_{p+1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k = 0.$$

Pour la réciproque, la clé va être de noter que la relation donnée s'écrit encore, pour tout $p \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} u_k + \binom{p+1}{p} u_p = 0 \Leftrightarrow u_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} u_k.$$

Et le sens direct nous assure que cette relation est vérifiée pour les b_k.

Inversement soit $(u_p)_p$ une suite de réels tels que $u_0 = 1$ et pour tout $p \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} u_k = 0$.

Prouvons alors par récurrence forte que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbf{N},\ u_p = b_p.}$

La récurrence est évidemment initialisée pour $p = 0$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k = b_k$. Alors

$$u_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} u_k = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} b_k = b_p.$$

Et donc par le principe de récurrence forte, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_p = b_p$.

On en déduit notamment, pour $p = 4$, que

$$b_4 = -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^{3} \binom{5}{k} b_k = -\frac{1}{5}\left(b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 5b_3\right) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{30}.}$$

7. Souvenons nous de la manière dont on a défini B_{p+1} : on a $P_p = \frac{B_{p+1}}{p+1}$, ce qui signifie notamment que $\Delta\left(\frac{B_{p+1}}{p+1}\right) = X^p$.

Mais d'après la question 1.c, ceci implique que $\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} B_{p+1}(n) - \frac{1}{p+1} B_{p+1}(0)$.

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n-1} k^p + n^p$$
$$= n^p + \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\right)$$
$$= n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$$
$$= n^p + \frac{1}{p+1} b_0 n^{p+1} + \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{1} b_1 n^p + \sum_{k=2}^{p} \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$$
$$= n^p + \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}(p+1)\frac{1}{2} n^p + \sum_{k=2}^{p} \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$$

On reprend la formule obtenue à la question 6.d., et on enlève le terme constant $B_{p+1}(0)$ correspondant à $k = p+1$.

$$= \boxed{\frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j} b_{p+1-j} n^j.}$$

Détails
On a procédé au changement d'indice $j = p+1-k$ et utilisé la symétrie des coefficients binomiaux.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+b_4 n+\frac{1}{5}\binom{5}{2}b_3 n^2+\frac{1}{5}\binom{5}{3}b_2 n^3 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n = \boxed{\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}}.$$

Partie III. Développement limité de tan.

8.a. Au voisinage de 0, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, et donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, si bien que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, et donc f est continue en 0.
Puisqu'elle est continue sur $\mathbf{R}^*$ car quotient de deux fonctions continues, elle est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier.

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+o(x^{n+1})} = \frac{1}{1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{x^{k-1}}{k!}+o(x^n)}.$$

Et alors en composant avec le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ en 0, il vient

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{x^{k-1}}{k!}\right)^j + o(x^n).$$

C'est donc bien un développement limité de f en 0 à l'ordre n.

8.b. En particulier, à l'ordre 3, il vient

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{8}+o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \boxed{1-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}x^2+o(x^3).}$$

On en déduit que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$ et $\alpha_3 = 0$.

8.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par produit de développements limités, on a

$$\begin{aligned} f(x)(e^x-1) &\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}x^i\right)+o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\alpha_k}{k!}\frac{1}{(k-i)!}\right)x^i+o(x^n) \end{aligned}$$

Détails
C'est tout simplement la formule qui donne le coefficient de degré i d'un produit de polynômes. On notera que la somme s'arrête à $i-1$ et pas à i car $e^x - 1$ n'a pas de terme de degré 0 (ou plutôt que celui-ci est nul).

Mais puisque $f(x)(e^x-1) = x$, par unicité du développement limité, tous les coefficients de degré supérieur ou égal à 2 sont nuls.

En particulier celui de degré n : $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{(n-k)!k!} = 0$, ce qui après multiplication par $n!$ nous donne $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha_k = 0.}$ Donc pour $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\alpha_k = 0$.

On reconnaît là, à un changement d'indice près, la relation de récurrence définissant les nombres de Bernoulli, et puisque de plus $\alpha_0 = 1$, on a nécessairement[8], $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ \alpha_k = b_k.}$

Remarque
C'est généralement cette définition qui est donnée des nombres de Bernoulli : les b_k tels que $\frac{b_n}{n!}$ soit le coefficient de degré n du $DL_n(0)$ de $\frac{x}{e^x-1}$.

9. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Alors

$$f(x)+\frac{x}{2} = \frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2} = \frac{2x+x(e^x-1)}{2(e^x-1)}$$

$$= \frac{xe^x + x}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\frac{e^{x/2}}{e^{x/2}}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$$
$$= \frac{x}{2}\frac{2\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \boxed{\frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right).}$$

Puisque coth est impaire[9] et que $x \mapsto x$ est également impaire, $x \mapsto f(x) + \frac{x}{2}$ est paire.
Et par conséquent, les coefficients de degré impair de son développement limité à l'ordre n sont nuls.
Mais les coefficients de son développement limité sont alors ceux de f, à l'exception de celui de degré 1, auquel on a ajouté $\frac{1}{2}$.
Et donc pour $n \geqslant 1$, $\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ si bien que $\boxed{b_{2n+1} = 0.}$

[9] Car quotient d'une fonction paire par une fonction impaire.

10. On a donc, pour $x \neq 0$, $f(2x) + x = x\coth(x)$, et donc pour $n \geqslant 2$,

$$\coth(x) - \frac{1}{x} = \frac{f(2x)}{x} + 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{b_k}{k!}(2x)^k + 1 + o(x^n) - \frac{1}{x}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \boxed{\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2^k b_k}{k!}x^{k-1} + o(x^n).}$$

Détails
Le $+1$ compense $2b_1$, et de même $b_0\frac{1}{x}$ compense le $-\frac{1}{x}$. C'est une bonne nouvelle si on veut vraiment obtenir un développement limité (qui possède toujours une limite finie en 0).

11. Soit $x \neq 0$. Alors

$$2\coth(2x) - \coth(x) = 2\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}} - \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})} - \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$
$$= \frac{2e^{2x}+2e^{-2x} - (e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}$$
$$= \frac{(e^x-e^{-x})}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \boxed{\operatorname{th}(x).}$$

On en déduit alors que

$$\operatorname{th}(x) = 2\coth(2x) - \coth(x) = 2\left(\coth(2x) - \frac{1}{2x}\right) - \left(\coth(x) - \frac{1}{x}\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 2\sum_{k=2}^{2n}\frac{b_k 2^k}{k!}(2x)^{k-1} - \sum_{k=2}^{2n}\frac{b_k 2^k}{k!}x^{k-1} + o(x^{2n})$$
$$\underset{x\to 0}{=} 2\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}2^{2k}}{(2k)!}x^{2k-1} + o(x^{2n})$$
$$\boxed{\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)}{(2k)!}x^{2k-1} + o(x^{2n}).}$$

Détails
Les b_{2k+1} sont nuls (sauf b_1), donc on ne garde que les termes de degré impair.

12. Ces deux fonctions sont $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, donc par la formule de Taylor-Young, admettent un développement limité de tout ordre au voisinage de 0.

13. Puisque tan et th sont impaires, les coefficients de degré pair de leur développement limité en 0 sont nuls : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ a_{2k} = c_{2k} = 0.}$

14.a. On a $\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$ et $\boxed{\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2.}$

14.b. C'est du grand classique[10], on a

$$\tan'(x) = 1+\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1+(x+a_3x^3+a_5x^5)^2+o(x^6) \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+2a_3x^4+(a_3^2+2a_5)x^6+o(x^6).$$

Donc par intégration de développement limité, il vient

$$x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7) \underset{x\to 0}{=} \tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}a_3x^5 + \frac{a_3^2+2a_5}{7}x^7 + o(x^7).$$

[10] Au moins pour la tangente.

Remarque
On a utilisé le fait qu'on connaît déjà le terme d degré 1, ce qui n'est pas une obligation.

Par unicité du développement limité, on a donc $\begin{cases} a_3 = \frac{1}{3} \\ a_5 = \frac{2}{3}a_3 \\ a_7 = \frac{a_3^2+2a_5}{7} \end{cases}$ et donc $a_5 = \dfrac{2}{15}$, $a_7 = \dfrac{17}{315}$.

Sur le même principe, on a

$$\text{th}'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - (x + c_3x^3 + c_5x^5)^2 + o(x^6) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 - 2c_3x^4 - (c_3^2 + 2c_5)x^6 + o(x^6).$$

Et donc par intégration, puis unicité du développement limité, on obtient

$$\boxed{\text{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).}$$

14.c. Notons $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ la partie régulière du $DL_{2n}[0)$ de tan.

Alors $\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)^2 + o(x^{2n})$.

Mais par produit de polynômes, $P(x)^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4n}\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} x^k$.

Or pour k impair et $0 \leqslant i \leqslant k$, i et $k-i$ sont de parités opposées, donc l'un des deux réels a_i et a_{k-i} est nul. Donc

$$\begin{aligned} P(x)^2 &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{2k} a_i a_{2k-i} x^{2k} = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{2k} a_i a_{2k-i} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1} a_{2j+1}a_{2k-(2j+1)}x^{2k} = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1} a_{2j+1}a_{2(k-j)-1}x^{2k} \end{aligned}$$

Détails
Encore une fois, pour i pair $a_i = 0$.

Si on revient au développement limité d'ordre $2n$, tous les termes de degré supérieur à $2n$ peuvent passer dans le $o(x^{2n})$ et il reste

$$\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_{2i+1}a_{2(k-i)+1}x^{2k} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} a_{2i+1}a_{2(k-j)+1}x^{2k+2} + o(x^2n).}$$

14.d. Par intégration du développement limité de $\tan' = 1 + \tan^2$, on a donc

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\tan(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{2i+1}a_{2(k-i)+1}\right)\frac{x^{2k+3}}{2k+3} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Mais puisque par ailleurs, $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$, par unicité du développement limité de tan,

$$\boxed{a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n-1} a_{2i+1}a_{2(n-1-i)+1}.}$$

14.e. Sur le même principe, on a $\text{th}^2(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k} c_{2i+1}c_{2(k-i)+1}\right)x^{2k+2} + o\left(x^{2n}\right)$ et donc en intégrant $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$, il vient

$$\text{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\text{th}(0)}_{=0} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k} c_{2i+1}c_{2(k-i)+1}\frac{x^{2k+3}}{2k+3}\right) + o\left(x^{2n+2}\right)$$

et donc par unicité du développement limité, $c_{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_{2i+1}c_{2(n-1-i)+1}$.

14.f. Procédons par récurrence forte sur n, en notant que $a_1 = 1 = c_1$, ce qui initialise la récurrence.
Supposons donc que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k+1} = (-1)^k c_{2k+1}$. Alors

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= \frac{1}{2n+3}\sum_{i=0}^{n} a_{2i+1}a_{2(n-i)+1} \\ &= \frac{1}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_{2i+1}(-1)^{n-i}c_{2(n-i)+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{2n+3}\sum_{i=0}^{n} c_{2i+1}c_{2(n-i)+1} \\ &= -(-1)^n c_{2n+3} = (-1)^{n+1}c_{2n+3}. \end{aligned}$$

Détails
C'est l'hypothèse de récurrence, qui s'applique bien puisque à la fois i et $n-i$ sont dans $[\![0, n]\!]$.

Donc par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ a_{2n+1} = (-1)^n c_{2n+1}.}$

15. On en déduit donc que le développement limité de tan au voisinage de zéro est donné par

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k c_{2k+1}x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k b_{2k}.\frac{4^k\left(4^k-1\right)}{(2k)!}x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right).}$$

Partie IV. Valeur de la fonction ζ aux entiers pairs.

16.a. Soit $k \geqslant 2$. Alors $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$.

16.b. Notons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, si bien que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Et donc (u_n) est majorée, et donc par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

16.c. Soit $p \geqslant 2$. Pour tout $n \geqslant 1$, posons $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$. Alors comme à la question précédente, (v_n) est croissante, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 2$.
Donc (v_n) est croissante et majorée, et donc converge.

17. C'est assez classique[11] : pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\left(e^{2ik\pi t}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik\pi t}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2i\pi t}\right)^k\right).$$

[11] Mais tout de même pénible...

Puisque $t \notin]0, 1[$, $e^{2i\pi t} \neq 1$, et donc nous reconnaissons la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\left(e^{2i\pi t}\right)^k &= e^{2i\pi t}\frac{1-e^{2i\pi nt}}{1-e^{2i\pi t}} \\ &= e^{2i\pi t}\frac{e^{i\pi nt}}{e^{i\pi t}}\frac{e^{-i\pi nt} - e^{i\pi nt}}{e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}} \\ &= e^{i\pi(n+1)t}\frac{2i\sin(\pi nt)}{2i\sin(\pi t)} \\ &= \left(\cos(\pi(n+1)t) + i\sin(\pi(n+1)t)\right)\frac{\sin(\pi nt)}{\sin(\pi t)}. \end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t) = \cos(\pi(n+1)t)\frac{\sin(\pi n t)}{\sin(\pi t)}$.

Reste à noter que $\cos((n+1)t)\sin(nt) = \dfrac{1}{2}\left(\sin((2n+1)\pi t) - \sin(\pi t)\right)$ si bien que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}$.

Et donc $\lambda = \frac{1}{2}$ convient.

Rappel

$\cos(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(b-a)\right)$

18. Par intégration par parties[12], on a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^1 f(t)\sin((2n+1)\pi t)\,dt = \left[-f(t)\frac{\cos((2n+1)\pi t)}{(2n+1)\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(t)\cos((2n+1)\pi t)}{2n+1}\,dt.$$

[12] Et c'est notamment là qu'on a besoin de f de classe $\mathscr{C}^1$.

On a donc, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin((2n+1)\pi t)\,dt\right| \leqslant |f(1)|\frac{|\cos(n\pi)|}{2n+1} + \frac{|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left|\int_0^1 f'(t)\cos((2n+1)\pi t)\,dt\right|.$$

Mais par inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left|\int_0^1 f'(t)\cos((2n+1)\pi t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f'(t)\cos((2n+1)\pi t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

Puisque f' est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée, et donc il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $|f'(t)| \leqslant M$.

Et donc $\left|\displaystyle\int_0^1 f'(t)\cos((2n+1)\pi t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 M\,dt \leqslant M$.

Et ainsi,

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin((2n+1)\pi t)\,dt\right| \leqslant \frac{|f(1)|}{2n+1} + \frac{|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}M$$

si bien que par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin((2n+1)\pi t)\,dt = 0.}$

Remarque

Ce résultat, parfois appelé lemme de Riemann-Lebesgue reste vrai si f est seulement continue, mais il faut alors adapter la preuve, les arguments donnés ici ne sont plus recevables.

19.a. Rappelons que $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_{1,k} &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\cos(2k\pi t)\,dt \\
&= \left[B_2(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t-1)\frac{\sin(2k\pi)}{2k\pi}\,dt \\
&= -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 (2t-1)\sin(2k\pi t)\,dt \\
&= \frac{1}{2k\pi}\left[(2t-1)\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\,dt \\
&= \frac{1}{2k^2\pi^2} - \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{k\pi}\,dt \\
&= \frac{1}{2k^2\pi^2} - \left[\frac{\sin(2k\pi t)}{2k^2\pi^2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2k^2\pi^2}.}
\end{aligned}$$

19.b. Soit $p \geqslant 2$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors une intégration par parties, en se souvenant que $B'_{2p} = 2pB_{2p-1}$ nous donne

$$\begin{aligned}
I_{p,k} &= \int_0^1 B_{2p}(t)\cos(2k\pi t)\,dt \\
&= \underbrace{\left[B_{2p}(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 2pB_{2p-1}(\pi t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p}{k\pi}\int_0^1 B_{2p-1}(t)\sin(2k\pi t)\,dt\\
&= \frac{p}{k\pi}\left[B_{2p-1}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1 - \frac{p}{k\pi}(2p-1)\int_0^1 B_{2p-2}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\,dt\\
&= \frac{p}{2k^2\pi^2}\underbrace{\left(B_{2p-1}(1)-B_{2p-1}(0)\right)}_{=0} - \frac{p(2p-1)}{2k^2\pi^2}I_{p-1,k} = -\frac{2p(2p-1)}{4k^2\pi^2}I_{p-1,k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_{2,k} = -\dfrac{4\times 3}{4k^2\pi^2}I_{1,k}$ puis

$$I_{3,k} = -\frac{6\times 5}{4k^2\pi^2}I_{2,k} = \frac{6\times 5\times 4\times 3}{(4k^2\pi^2)^2}I_{1,k}$$

et une récurrence facile prouve que pour $p \geqslant 1$,

$$I_{p,k} = (-1)^{p-1}\frac{(2p)!}{2}\frac{1}{(4k^2\pi^2)^{p-1}}I_{1,k} = (-1)^{p-1}\frac{(2p)!}{2^{2p-1}k^{2p-2}\pi^{2p-2}}\frac{1}{2k^2\pi^2} = \boxed{(-1)^{p-1}\frac{(2p)!}{4^pk^{2p}\pi^{2p}}.}$$

20. Commençons par noter que φ_p est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ car quotient de fonctions qui le sont. On a alors

$$B_{2p}(t) - B_{2p}(0) = \sum_{k=0}^{2p-1}\binom{2p}{k}b_kt^{2p-k} = b_{2p-1}t + \sum_{k=0}^{2p-2}\binom{2p}{k}t^{2p-k}$$

et puisque $b_{2p-1} = 0$, $B_{2p}(t) - B_{2p}(0) \underset{t\to 0}{=} o(t)$.
Comme par ailleurs, $\sin(\pi t) \underset{t\to 0}{\sim} \pi t$, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_p(t) = 0 = \varphi_p(0)$.
Donc $\boxed{\varphi_p \text{ est continue en } 0.}$

Par ailleurs, rappelons que, avec les notations de la partie II,
$\Delta(B_{2p}) = (2p)\Delta(P_{2p-1}) = 2pX^{2p-1}$, donc $B_{2p}(X+1) = 2pX^{2p-1} + B_{2p}(X)$.
En particulier, $B_{2p}(x) = 2p(x-1)^{2p-1} + B_{2p}(x-1)$, si bien que lorsque $x \to 1$,

$$B_{2p}(x) - B_{2p}(0) = 2p(x-1)^{2p-1} + B_{2p}(x-1) - B_{2p}(0) \underset{x\to 0}{=} o(x-1).$$

Mais $\sin(\pi x) = \sin(\pi(x-1)+\pi) = -\sin(\pi(x-1)) \underset{x\to 1}{\sim} -\pi(x-1)$, et donc $\varphi_p(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

De même, on a $\dfrac{\varphi_p(t)-\varphi_p(0)}{t} = \dfrac{B_{2p}(t)-B_{2p}(0)}{t\sin(\pi t)}$, avec

$$B_{2p}(t) - B_{2p}(0) \underset{t\to 0}{=} \binom{2p}{2}b_{2p-2}t^2 + o(t^2).$$

Remarque
On aurait même directement un équivalent si on savait que $b_{2p-2} \neq 0$, mais nous ne l'avons pas prouvé (bien que ce soit vrai).

et donc $\dfrac{\varphi_p(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{p(2p-1)}{\pi}b_{2p-2}$, si bien que φ_p est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = \dfrac{p(2p-1)}{\pi}b_{2p-2}$.
On a alors, pour $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\varphi_p'(t) &= \frac{B_{2p}'(t)\sin(\pi t) - (B_{2p}(t)-B_{2p}(0))\pi\cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}\\
&= \frac{2pB_{2p-1}(t)\sin(\pi t) - (B_{2p}(t)-B_{2p}(0))\pi\cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}
\end{aligned}$$

Mais $2pB_{2p-1}(t)\sin(\pi t) \underset{t\to 0}{=} 2p(2p-1)b_{2p-2}\pi t^2 + o(t^2)$.
Et $B_{2p}(t) - B_{2p}(0) \underset{t\to 0}{=} p(2p-1)b_{2p-2}t^2 + o(t^2)$, si bien que

$$\begin{aligned}
\varphi_p'(t) &\underset{t\to 0}{=} \frac{2p(2p-1)b_{2p-2}\pi t^2 - p(2p-1)b_{2p-2}\pi t^2 + o(t^2)}{\sin^2(\pi t)}\\
&\underset{t\to 0}{\sim} \frac{p(2p-1)b_{2p-2}t^2}{\pi^2t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{p(2p-1)}{\pi}b_{2p-2} = \varphi_p'(0).
\end{aligned}$$

Remarque
Avec le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ (pas au programme de ce DS), on peut se contenter de calculer la limite de φ_p et celle de φ_p', et éviter celle du taux d'accroissement.

Donc φ' est continue en 0, si bien que φ_p est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

21. On a, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\varphi_p(t)\sin((2n+1)t) &= (B_{2p}(t) - B_{2p}(0)2\frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(\pi t)} \\ &= (B_{2p}(t) - B_{2p}(0))\left(2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t) + 1\right)\end{aligned}$$

et les deux membres de l'égalité étant continus, cette relation vaut encore pour $t = 0$ et $t = 1$.
Donc par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,dt &= 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (B_{2p}(t) - B_{2p}(0))\cos(2k\pi t)\,dt + \int_0^1 (B_{2p}(t) - B_{2p}(0))\,dt \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} I_{p,k} - 2b_{2p}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,dt + \underbrace{\int_0^1 B_{2p}(t)\,dt}_{=0} - b_{2p} \\ &= \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}} - b_{2p}..\end{aligned}$$

Détails

$\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,dt = 0.$

Mais par ailleurs, par la question 18, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi_p(t)\sin((2n+1)\pi t)\,dt = 0$, si bien que

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}} - b_{2p}$$

et donc $\dfrac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\zeta(2p) - b_{2p} = 0$, si bien que $\zeta(2p) = \dfrac{(-1)^{p-1}b_{2p}\pi^{2p}2^{2p-1}}{(2p)!}$.

En particulier pour $p = 1$, $\zeta(2) = b_2\pi^2\frac{2}{2!} = \boxed{\dfrac{\pi^2}{6}}$ et pour $p = 2$,

$$\zeta(4) = -b_4\pi^4\frac{2^3}{4!} = \frac{1}{30}\pi^4\frac{8}{24} = \boxed{\frac{\pi^4}{90}}.$$

22. Il s'agit de remarquer que $\zeta(2p)\pi^{-2p} = (-1)^{p-1}b_{2p}\dfrac{2^{2p-1}}{(2p)!}$, et une récurrence forte en utilisant la relation $b_p = -\dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k}b_k$ prouve que tous les nombres de Bernoulli sont rationnels.

Commentaires *: on pourrait prouver, en utilisant $\dfrac{1}{k^p} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^p}$ que $\zeta(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, si bien que $b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^{p-1}\dfrac{(2p)!}{\pi^{2p}2^{2p-1}}$, et même utiliser la formule de Stirling pour un équivalent sans factorielles.*
La méthode ne s'adapte pas[13] au calcul de $\zeta(2p+1)$.
D'ailleurs on sait très peu de choses au sujet de ces nombres, si ce n'est que $\zeta(3)$ est irrationnel (résultat prouvé par APÉRY en 1978).
Il a été prouvé par exemple que l'un des réels $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel, mais on ne sait pas lequel...

[13] Et je vous laisse chercher où ça coince.